

I poliedri regolari

I poliedri regolari, comunemente chiamati *solidi platonici* (in onore del filosofo greco Platone), già dal nome tradiscono l'importanza che hanno avuto nella storia del pensiero scientifico e artistico. La loro regolarità e il loro numero limitato ha indotto a identificarli come concreta manifestazione degli ideali di perfezione e di armonia che venivano perseguiti da pensatori e artisti di diverse epoche.

• I poliedri regolari nella geometria

I poliedri regolari sono solidi delimitati da poligoni regolari e da angoli uguali.

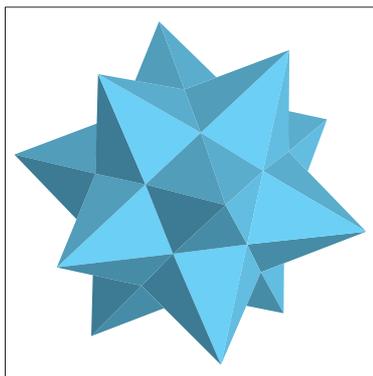
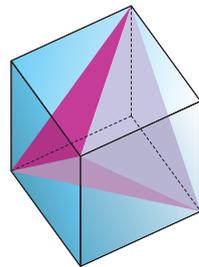
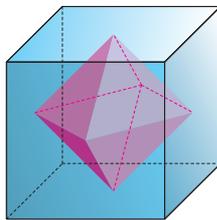
Mentre nel piano esistono infiniti poligoni regolari, il numero dei poliedri regolari è molto ristretto; ne esistono solo cinque: il *tetraedro*, l'*esaedro* (cubo), l'*ottaedro*, il *dodecaedro* e l'*icosaedro*. Le loro facce hanno forma di triangolo equilatero, quadrato e pentagono regolare.

Sfere concentriche possono essere inscritte o circoscritte sui poliedri regolari. Il centro delle sfere è detto *centro del poliedro*.

Tra loro esistono legami di **dualità**, cioè da un solido si può ottenere il suo duale sostituendo ogni suo elemento con l'elemento duale dell'altro solido. Per esempio sono duali il cubo e l'ottaedro, perché i centri delle facce del cubo sono i vertici di un ottaedro e viceversa.

Molte altre relazioni sono state scoperte tra questi solidi; per esempio in un cubo le diagonali per quattro vertici opposti sono gli spigoli di un tetraedro.

Questi solidi platonici però dovrebbero essere definiti come **poliedri regolari convessi**. Quando si affacciò con Keplero la possibilità di ottenere altri poliedri basati su poligoni regolari concavo-convessi, ne sono stati definiti altri quattro, detti *poliedri di Keplero-Poinsot*. Essi sono determinati dalla compenetrazione di facce a forma di poligoni regolari stellati.



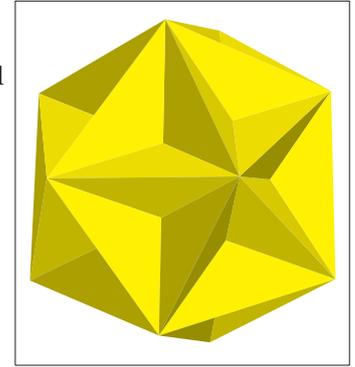
Piccolo dodecaedro stellato di Keplero.

Essi sono:

- i **poliedri di Keplero**, cioè il *piccolo dodecaedro stellato* che ha come facce 12 pentagoni stellati, con 12 vertici e 30 spigoli, e il *grande dodecaedro stellato* che ha ancora come facce 12 pentagoni stellati, con 20 vertici e 30 spigoli;
- i **poliedri di Poinsot**, cioè il *grande dodecaedro*

che ha 12 facce a forma di pentagoni regolari, con 12 vertici e 30 spigoli, e il *grande icosaedro* che ha 20 facce a forma di triangoli equilateri, con 12 vertici e 30 spigoli.

In sostanza questi solidi stellati nascono aggiungendo o sottraendo delle particolari piramidi sulle facce di un dodecaedro o icosaedro regolare.



Dodecaedro di Poinsot.

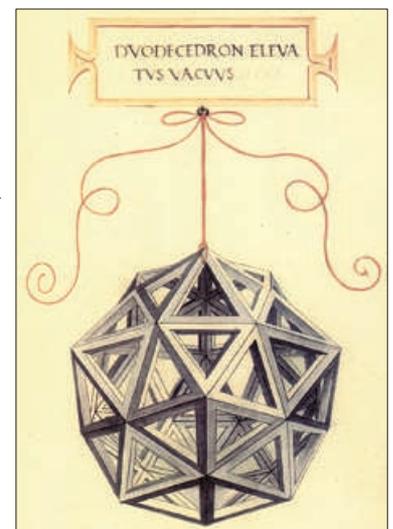
• I poliedri regolari nel pensiero scientifico

Come si è già accennato al nome di Platone vengono associati i poliedri regolari; egli infatti lasciò in suo dialogo, il *Timeo*, una accurata descrizione degli stessi. La loro scoperta è attribuita all'ambiente pitagorico, che lasciò profonde tracce nel pensiero di Platone, tanto da suscitare in lui un'ammirazione entusiastica nei confronti di questi solidi perfettissimi. Nella sua visione cosmologica quattro di essi (tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro) furono associati rispettivamente agli elementi naturali (fuoco, aria, acqua, terra), mentre del quinto (dodecaedro) «Dio se ne giovò per decorare l'universo». Questo ruolo speciale del dodecaedro potrebbe essere attribuito al culto pitagorico per questa figura derivata dal pentagono regolare (v. quanto detto nella scheda sulla *Sezione aurea*).

La scienza antica definì le proprietà geometriche dei solidi regolari nei trattati di Teeteto (V sec. a.C.), amico di Platone, e in quelli di Euclide (IV se. a.C.).

Le suggestioni mistiche che questi solidi evocavano ebbero un forte risveglio con il ritorno agli studi degli antichi nel periodo rinascimentale. Nelle opere di **Piero della Francesca** (1412 -1492) e del suo amico **Luca Pacioli** (1445-1514) essi sono al centro di trattazioni specifiche. Al trattato *De divina proportione* di Pacioli sono allegati splendidi disegni di **Leonardo da Vinci** sui solidi platonici (pieni, vuoti ed elevati). La presenza di solidi regolari elevati (cioè con l'aggiunta di piramidi regolari sulle facce) potrebbe indurre a pensare che già fossero stati definiti i solidi regolari stellati; i disegni smentiscono chiaramente questa ipotesi.

Con **Giovanni Keplero** (1571-1630), entusiasta ammiratore della divina bellezza di questi poliedri, si rinnovò la mistica riproposizione di questi solidi come simboli dell'armonia divina dei corpi celesti. Ma egli ebbe anche il grande merito di definire altri due solidi regolari, non più convessi, ma *concavo-convessi*, dischiudendo un orizzonte innovativo di ricerca.



Duodecedron elevatus vacuus di Leonardo da Vinci (1498), dal trattato *De divina proportione* di Luca Pacioli.

glossario

Angoloide: parte di spazio delimitato da tre o più facce con un vertice comune. L'angoloide è l'analogo tridimensionale degli angoli piani.

Poliedro convesso: poliedro tale che tutti i segmenti condotti da due vertici siano sempre interni al solido.

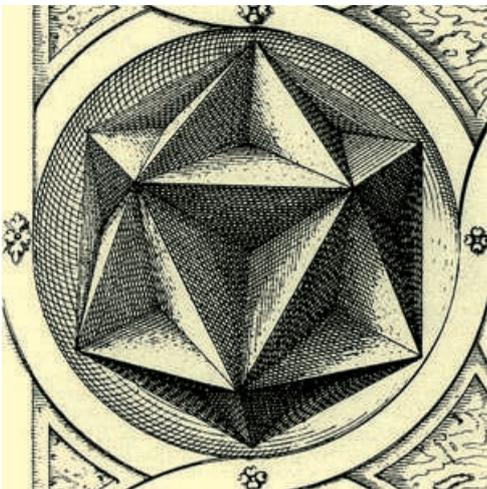
Nel 1810 il matematico francese **Louis Poincot** propose altri due poliedri stellati regolari. Da allora gli studi scientifici sui solidi regolari hanno conosciuto un continuo sviluppo, attualmente sostenuto dalla potenza degli strumenti informatici.

• I poliedri regolari nell'arte

Il carico simbolico di armonia e perfezione implicito nei poliedri regolari ha trovato rispondenza negli artisti più inclini alla ricerca di questi ideali. Artisti rinascimentali, quali Leonardo e Piero della Francesca, si sono cimentati nello studio e nella rappresentazione di questi solidi; nel caso di Leonardo si è addirittura rasentata la consapevole scoperta dei poliedri stellati regolari. Un altro grande pittore del Rinascimento, Paolo Uccello (1397-1475), provetto disegnatore di solidi complessi e fortemente appassionato di geometria, ci ha lasciato una tarsia marmorea in S. Marco a Venezia, che anticipa nettamente la scoperta dei solidi stellati regolari da parte di Keplero. Un altro anticipatore della scoperta di questi solidi, stavolta quelli di Poincot, fu il raffinato disegnatore e orafo tedesco Wenzel Jamnitzer (1508-1585); il suo *Icosaedro* è lievemente difforme dalla precisa rappresentazione del solido di Poincot.



Tarsia marmorea di Paolo Uccello (1425-1430), Basilica di S. Marco, Venezia .



Icosaedro di Wenzel Jamnitzer (1568), dal suo trattato *Perspectiva corporum regularium*.

«La principale ragione per studiare i poliedri regolari è ancora la stessa che al tempo dei Pitagorici, cioè che le loro forme simmetriche interessano il nostro senso artistico».

H. S. M. COXETER

Sensibile al richiamo dell'armonia e della geometria, il geniale disegnatore M. C. Escher si cimentò nella rappresentazione dei solidi platonici e stellati, in merito ai quali così si esprime: «Essi simbolizzano il desiderio di armonia e di ordine dell'uomo, ma nello stesso tempo la loro perfezione desta in noi il senso della nostra impotenza. I poliedri regolari non sono invenzioni della mente umana, perché esistevano molto prima che l'uomo comparisse sulla scena...».

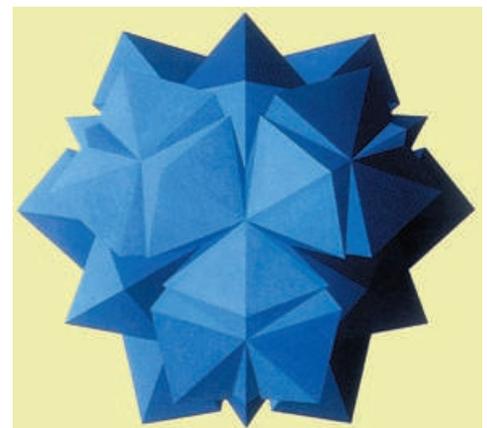
Ancora oggi in molti artisti, spesso supportati dalla grafica computerizzata, il fascino di queste forme rivive in opere di stupefacente bellezza.



Ordine e caos di M. C. Escher (1950).



L'ultima Cena di Salvador Dalì (1955). Sulla scena, intrisa di forte simbolismo, fluttua un enorme dodecaedro regolare.



Il poliedro M₂ di Lucio Saffaro (1985).