

Geometria e disegno

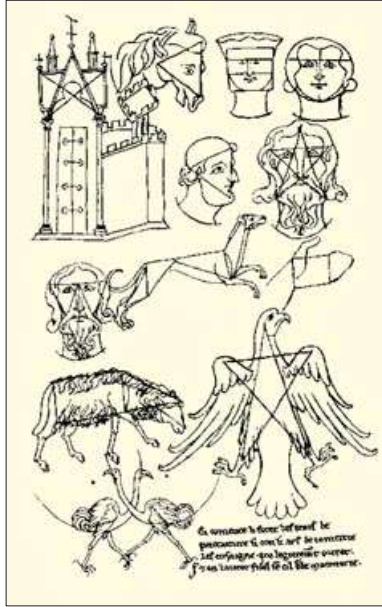
«Il libro della natura è scritto in lingua matematica ed i suoi caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.»

Galileo Galilei

Il disegno «spontaneo» tende naturalmente a divenire disegno lineare, cioè strutturato su linee, e quindi a una schematizzazione geometrica.

Il tecnico invece il riferimento a forme geometriche regolari è sistematico e integrale; questo rapporto tra geometria e disegno è da sempre stato talmente stretto da far pensare che l'una non si sarebbe sviluppata senza l'altro, e viceversa.

La geometria ha avuto fin dalle prime origini un fascino magico: la sua capacità di astrazione dalla realtà, il suo rigore dimostrativo, le conquiste di nuove acquisizioni portarono ben oltre la soluzione di problemi concreti; l'estetica, la ricerca del bello e dell'armonia, ha sempre avuto nella geometria un territorio ricco di stimoli per aprire nuove frontiere al mondo delle arti e del pensiero.



«Qui comincia il metodo del disegno secondo l'arte della geometria, per lavorare facilmente» dal *Quadermo di studi* di Villard de Honnecourt (XIII sec.).

• Mesopotamia ed Egitto

Geometria è un termine greco coniato per la misurazione della terra (*geo* = terra e *metria* = misurazione). Erodoto, storico greco del V sec. a.C., attribuisce l'origine di questa disciplina agli antichi egizi che, per la necessità di misurare i terreni per scopi fiscali, scoprirono regole per il calcolo delle aree di varie figure.

Le antiche civiltà fluviali (Egitto e Mesopotamia) svilupparono tecniche di misurazione dei terreni agricoli mediante *triangolazione*, cioè dividendo superfici poligonali in triangoli; con semplici funi si eseguivano misurazioni lineari dei lati



Affresco dell'antico Egitto raffigurante la mietitura: i terreni agricoli erano oggetto di accurate misurazioni da parte degli agrimensori.



Tavoletta babilonese con problemi di geometria.

di questi triangoli e con regole abbastanza evolute se ne poteva calcolare l'area.

Gradualmente si sviluppò un sapere teorico basato sugli strumenti disponibili per la misurazione e per il disegno. Non sembra un caso che in Egitto si svilupparono, più che in Mesopotamia, complesse regole geometriche; la disponibilità del papiro consentiva una precisione di disegno superiore a quella delle tavolette d'argilla.

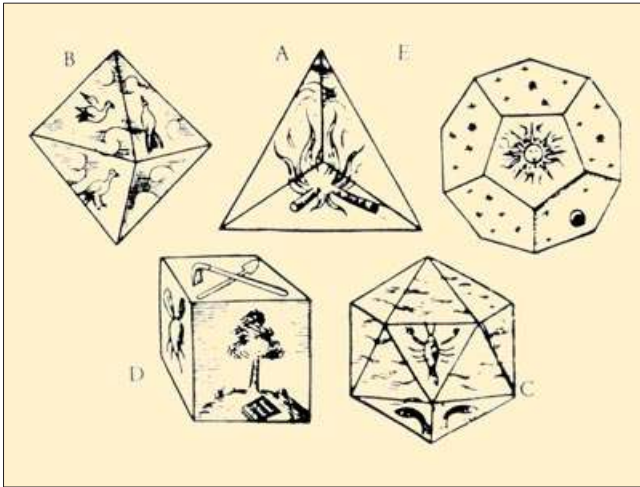
• Antica Grecia

L'incontro della nascente civiltà ellenica con quella egizia è ben evidenziata dall'aneddoto che riguarda il filosofo greco Talete (VI sec. a.C.); di fronte alle piramidi egli stupì i dotti sacerdoti egizi calcolando l'altezza della piramide mediante la lunghezza del lato di base e l'ombra del suo vertice.

Da Talete in poi i sapienti dell'antica Grecia apportarono un grandioso sviluppo alla geometria mediante apparati concettuali sempre più astratti e rigorosi, ma suscettibili di applicazioni tecnologiche; per tutti valga la geniale figura di Archimede.

La meravigliosa scoperta di relazioni e leggi geometriche, portò gli antichi a privilegiare questa scienza in ogni settore dell'operare umano; gli studiosi di geometria erano i sapienti, i filosofi. Attraverso le armonie geometriche i filosofi greci, da Talete a Platone, cercavano di interpretare l'universo, di dare una definizione alla bellezza.

Così Platone parla della bellezza delle forme geometriche: «Ciò che io intendo per bellezza delle forme non è la bellezza dei corpi viventi, o la loro riproduzione a mezzo del disegno. Io intendo le linee rette e curve, le superfici e i solidi, che derivano dalla retta e dal cerchio, con l'ausilio del compasso, della riga e della squadra. Poiché queste forme non sono belle, come altre, a certe condizioni, ma sempre belle in sé, per natura, e sono fonte di particolarissimi piaceri.»



Giovanni Keplero, *Harmonices Mundi*, libro V (1619).

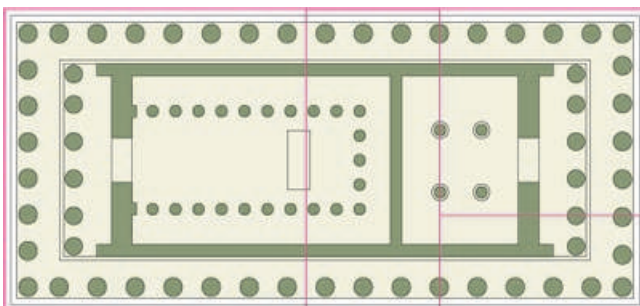
Platone, di formazione pitagorica, riporta nel suo dialogo *Timeo* la meravigliosa armonia dei cinque solidi regolari a cui associa la creazione divina dei quattro elementi (acqua, terra, aria e fuoco) e dell'universo nel suo complesso. La mistica relazione tra cosmogonia e solidi regolari (in futuro denominati *solidi platonici*) affascinò scienziati e artisti di tutti i tempi, primo fra tutti il grande matematico e astronomo Giovanni Keplero.

Sull'affascinante scoperta di proporzioni geometriche, in particolare quella del **rapporto aureo**, tutta l'arte e l'architettura antica fondò le proprie leggi dell'armonia; ogni costruzione e ogni suo elemento (colonne, capitelli, ecc.) era strutturato secondo proporzioni calcolate con precisione. I giovani artisti crescevano attraverso un duro tirocinio pratico, ma anche attraverso severi studi di geometria.

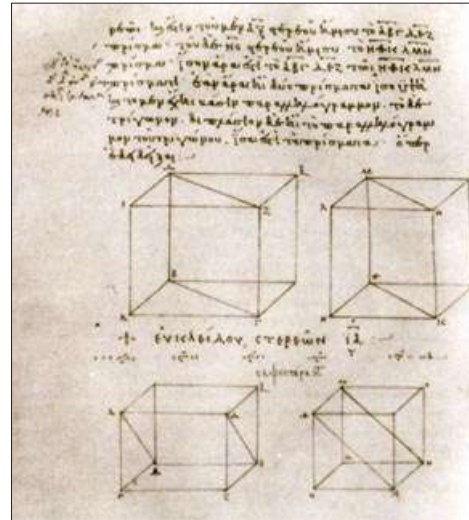
Il massimo fulgore della geometria antica come scienza esatta si ebbe verso il III sec. a.C. quando la fiorente cultura Alessandrina produsse il pensiero raccolto da Euclide nei suoi *Elementi di geometria*. Nei 13 libri di questo trattato Euclide istituì una scienza rigorosa basata su un apparato teorico semplice e chiaro, e sul metodo deduttivo. La **geometria euclidea** è una teoria scientifica fondata su *definizioni* (gli enti geometrici, come punto, linea, retta, piano), cinque *nozioni comuni* (per esempio: «l'intero è maggiore della parte») e cinque *postulati* o *assiomi*.

Ogni altra affermazione sugli enti geometrici sarà accettata come vera solo trovandone la *dimostrazione*, cioè una catena di implicazioni logiche che parta dai postulati per giungere alla tesi.

È da rimarcare che i cinque postulati di Euclide riguardano enti geometrici rappresentabili con riga e compasso, cioè gli strumenti allora disponibili per il disegno su papiro. Alla precisione del disegno era affidata parte notevole della dimostrazione; disegno e ragionamento deduttivo erano inscindibili.



Pianta del Partenone di Atene con schema di proporzioni basato su quadrati e su rettangoli con rapporto $1:\sqrt{5}$.



Pagina degli *Elementi* di Euclide dal *Codice Bodleiano* (888 d.C.).

Il modello assiomatico-deduttivo di Euclide è stato per due millenni il riferimento per ogni metodo scientifico.

• **Medioevo**

Attraverso il mondo romano e la sua decadenza il meraviglioso patrimonio di scienza geometrica della cultura greca rischiò di andar disperso. Fu grazie alla cultura araba, fiorita dall'VIII secolo d.C. e diffusa dall'espansione dell'Islam in tutto il bacino del Mediterraneo fino ai confini con l'Estremo Oriente, che il patrimonio scientifico del mondo classico sopravvisse e germogliò rigogliosamente.

I contatti del mondo arabo con l'impero di Bisanzio, ultimo custode dei manoscritti antichi, produssero una riappropriazione del patrimonio scientifico del mondo ellenistico da parte degli scienziati arabi; a essi si deve il salvataggio di opere andate poi distrutte nei saccheggi di Costantinopoli e di Alessandria.



Mosaici arabi dell'Alhambra, Granada, Spagna (XIV sec.).

glossario

Postulato o assioma: principio generale evidente e indimostrabile che funge da premessa a un ragionamento o un a teoria.

La geometria tornò a essere la scienza di base per lo sviluppo delle altre scienze e della tecnologia; la meccanica, l'astronomia, l'ottica, l'idraulica, la cartografia conobbero un vero «rinascimento» a opera di grandi scienziati arabi, quali Alhazen e Avicenna. Le città arabe furono abbellite da meravigliosi monumenti in cui l'amore per la scienza euclidea è testimoniato da finissime decorazioni con motivi geometrici che ricoprono intere facciate e cupole.

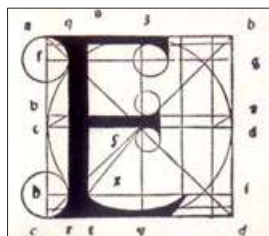


Decorazione geometrica nell'Alcazar di Siviglia, Spagna (XIV sec.)

• Rinascimento

La riscoperta del mondo classico e del suo spettacolare patrimonio scientifico e artistico si trovò al centro della cultura rinascimentale. I testi antichi vennero nuovamente studiati con passione, traducendoli e rielaborandone i contenuti.

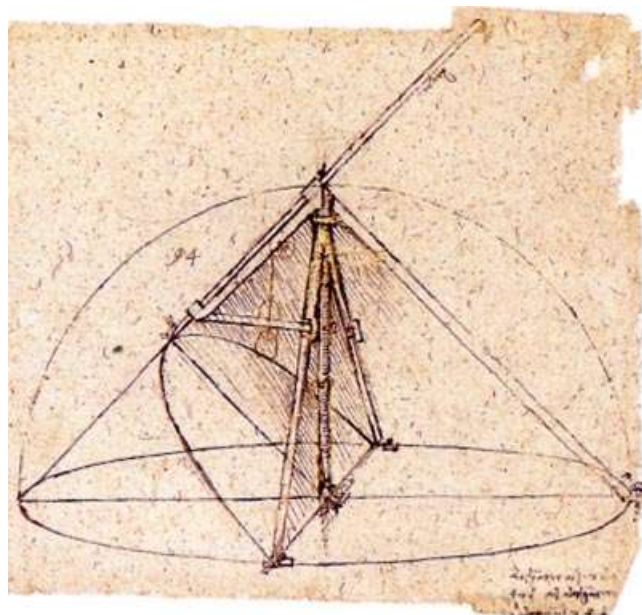
Gli ideali platonici divennero riferimento comune per filosofi, artisti e matematici. Il rilievo dei monumenti antichi condusse a scoprirne la bellezza attraverso le armoniche proporzioni geometriche; artisti e matematici, quali



Luca Pacioli: costruzione geometrica della lettera E secondo l'alfabeto romano, mediante quadrati, cerchi e rettangoli aurei (1509).



Ritratto di Luca Pacioli, opera di Jacopo de' Barbari (1498).



Compasso parabolico disegnato da Leonardo (1513).

Luca Pacioli e Leonardo da Vinci, furono incantati dalla riscoperta della **sezione aurea**, ridefinita come «divina proporzione», ritrovando nel disegno geometrico uno strumento di precisa verifica dell'idea di bellezza.

Tutti gli artisti rinascimentali si cimentarono negli studi dell'antica scienza geometrica applicandone le teorie nella pittura e soprattutto nell'architettura. Da Leonardo al Bramante, da Francesco di Giorgio Martini al Vignola tutta la produzione artistica e architettonica fu segnata dal fervore per le armonie geometriche.

Gli appassionanti studi delle opere sulle curve coniche di Archimede e di Apollonio di Perge (III sec. a.C.) fruttarono ingegnose rielaborazioni di strumenti (come il compasso parabolico di Leonardo) e congegni applicati a campi diversissimi, quali l'artiglieria militare, l'idraulica e la meccanica.

La passione di Leonardo per gli antichi scienziati fu condivisa da grandi artisti e matematici, tra cui Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Albrecht Dürer, Francesco di Giorgio Martini, Mariano Taccola.

Non va inoltre dimenticato che la scoperta della tecnica rigorosa della **prospettiva** a opera di Filippo Brunelleschi (primi anni del XV secolo) trovò valido supporto teorico negli studi sull'*Ottica* di Euclide, riscoperta e rieditata intorno alla metà del XV sec., per opera dell'Alberti e di molti altri studiosi fino a Girard Desargues (1593 - 1662) che sistematizzò la teoria della *geometria proiettiva*.

• Il Seicento e la rivoluzione scientifica

Gli studi rinascimentali sulla prospettiva e le ombre portarono alla nascita di una nuova geometria che si occupava delle trasformazioni delle figure sottoposte a operazioni di proiezione su superfici: la **geometria proiettiva**; essa si affiancava alla geometria euclidea assumendone completamente i principi teorici e il metodo assiomatico-deduttivo.

Grandissimi scienziati eclettici posero le basi di una profonda rivoluzione in tutti i settori della scienza, dalla fisica all'astronomia, dalla matematica alla geometria. Nicola Copernico

glossario

Geometria proiettiva: studia le proprietà che si conservano durante la proiezione di figure.

(1473 - 1543), Galileo Galilei (1564 - 1642), Cartesio (René Descartes, 1596 - 1650), Blaise Pascal (1623 - 1662), Giovanni Keplero (1571 - 1630), Isaac Newton (1642 - 1727) furono i fondatori del pensiero scientifico moderno.

Galileo, matematico e astronomo di valore, seppe applicare allo studio del moto dei corpi un metodo radicalmente innovativo: il **metodo sperimentale induttivo**. Nel processo conoscitivo l'osservazione e la sperimentazione vengono poste alla base della ricerca di leggi universali.

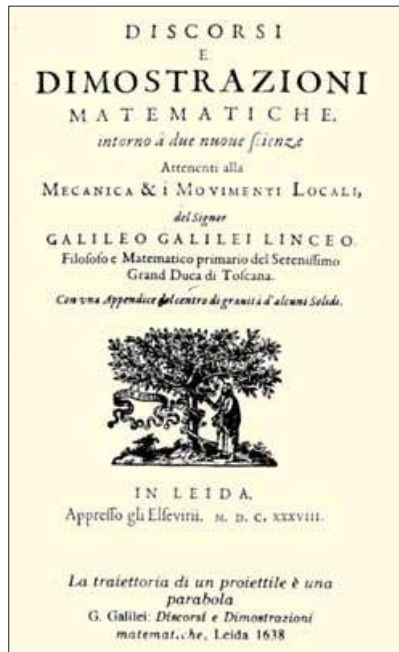
Queste però non hanno più il valore assoluto che nella scienza antica avevano gli *assiomi*, da cui venivano dedotte con rigore dimostrativo le singole articolazioni del sapere scientifico (leggi, teoremi, ecc.). Galileo attraverso gli studi dei grandi scienziati dell'antichità, cui riservò grande deferenza ma anche uno spigliato spirito critico, seppe applicare il metodo dimostrativo a dati sperimentali che suffragassero un concetto o una legge scientifica.

Altri grandi contributi alla scienza moderna vennero dall'insigne pensatore e scienziato francese Cartesio. Tra i tanti suoi meriti si deve annoverare la nascita di una nuova geometria, la **geometria analitica**. Studiando problemi geometrici, quali quelli delle linee curve, Cartesio supera l'uso di riga e compasso e si avvale di strumenti matematici. Mediante l'introduzione delle coordinate, cioè i valori delle distanze di un punto da due assi perpendicolari di riferimento, ogni ente geometrico viene descritto da equazioni algebriche. I più complessi problemi di geometria vengono risolti con l'ausilio dell'analisi matematica. La *Géometrie* di Cartesio rimane una pietra miliare della scienza moderna e per gli sviluppi più innovativi della geometria, fino alle attuali applicazioni nell'*informatica grafica*.

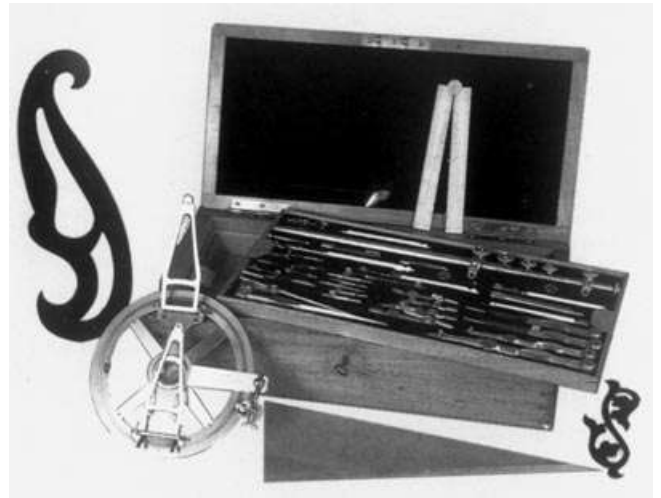
• Rivoluzione industriale e geometria descrittiva

Il poderoso fenomeno della *Rivoluzione industriale*, innescato da grandi invenzioni tecniche, che dalla metà del '700 condusse alla Civiltà delle macchine, ebbe ripercussioni profonde anche nel mondo della scienza. Le esigenze di produzioni industriali portarono una rigida divisione del lavoro, che vide separarsi definitivamente il ruolo del progettista da quello del tecnico e dell'operaio.

La definizione del prodotto industriale deve essere completa ed esplicita già in fase di progettazione, nulla può essere demandato alla creatività del singolo operatore; il **disegno tecnico** diventa il linguaggio principe per la comunicazione tra i diversi operatori. Tra la fine del '700 e l'inizio del secolo successivo il disegno si può avvalere di strumenti più precisi e funzionali, quali il tiralinee, il curvilineo, la squadretta a tre lati (come quella attuale) e il compasso di precisione. Ma



Frontespizio di *Discorsi e dimostrazioni matematiche sopra due nuove scienze* di Galileo Galilei (1638).



Collezione di strumenti di disegno (1880).

soprattutto dalla fine del secolo XVIII si ebbe a disposizione il più completo e organico sistema di rappresentazione: la **geometria descrittiva** fondata da Gaspard Monge (1746 - 1818).

L'opera di Monge fu anche più preziosa poiché realizzò un sistema di rappresentazione integrato con i metodi dell'analisi matematica.

«Non oi paragoniamo qui la geometria descrittiva all'algebra: i rapporti tra queste due scienze sono infatti particolarmente stretti. Non c'è alcuna costruzione propria della geometria descrittiva che non possa essere tradotta analiticamente, e... qualsiasi operazione analitica può essere interpretata come la redazione di una costruzione geometrica».

Le teorie della geometria analitica fondata da Cartesio venivano organicamente coniugate con quelle del disegno, dischiudendo definitivamente il processo di matematizzazione delle tecniche grafiche, che sarà fondamentale anche per la più recente rivoluzione tecnologica: quella informatica.

• Crisi della geometria euclidea

Le diverse geometrie (proiettiva, analitica e descrittiva) fondate dal pensiero scientifico moderno erano pur sempre basate sulle certezze della classica geometria euclidea.

Gli sforzi plurisecolari di trovare una valida indipendenza del V postulato di Euclide («per un punto esterno a una retta passa una sola parallela») non diedero risultati convincenti. Le difficoltà di dimostrazione del V postulato di Euclide arrivarono a consapevole maturazione alla fine del XVIII sec., quando D'Alembert definì la questione «lo scoglio e, per così dire, lo scandalo di tutta la geometria».

La concezione della geometria come scienza assiomatico-deduttiva cominciò a vacillare sotto i colpi di una visione scientifica basata sul **metodo ipotetico-deduttivo**. Ai principi inconfutabili della scienza classica si sostituirono *ipotesi* liberamente scelte e suggerite dalla propria cognizione delle forme nello spazio.

glossario

Geometria analitica: studia la descrizione di figure geometriche mediante metodi algebrici.

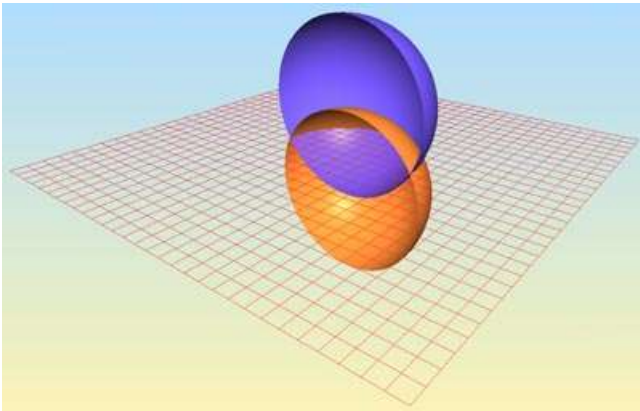
Metodo deduttivo: procedimento logico che da una o più premesse date fa derivare conclusioni logicamente necessarie.

Metodo induttivo: procedimento logico che da osservazioni ed esperienze particolari fa derivare principi generali in essi impliciti.

• Geometrie non euclidee

Karl Friederick Gauss (1777 - 1855) fu il primo matematico a pervenire a una chiara concezione indipendente dal V postulato di Euclide; a partire dal 1816 egli elaborò un sistema di teoremi fondanti una nuova *geometria non euclidea*.

Con Nikolaj Lobacevskij (1792 - 1856) si pone una visione della geometria fondata sul movimento e sulle percezioni sensoriali; i concetti primitivi della sua **geometria iperbolica** non sono più *punto*, *retta* e *piano*, ma *corpo* e *contatto*. I corpi sono costruiti operativamente a partire dalla dimensione più reale, quella *tridimensionale*. Il piano, per esempio, viene definito dall'intersezione di due superfici sferiche con centri in due punti diversi e con lo stesso raggio.



Nella geometria iperbolica il piano è definito dall'intersezione di sfere di uguale raggio.

Partendo da assiomi diversi nacquero diverse geometrie non euclidee, basate sul *principio di non contraddittorietà* delle premesse con le conclusioni. Tra i tanti scienziati che si cimentarono in queste nuove geometrie si possono annoverare Riemann, Hilbert, Poincaré e gli italiani Peano e Beltrami.

Stimoli provenienti dalla società industriale e dall'arte dell'inizio del XX secolo spinsero studiosi di geometria a considerare il superamento dello spazio a tre dimensioni. Un precursore di geometrie a n-dimensioni fu E. A. Abbott, teologo e matematico, nel suo libro *Flatland, romanzo a molte dimensioni* del 1884. In esso un dialogo dice: «In una dimensione un Punto in movimento non generava una linea con due punti terminali? In tre dimensioni un Quadrato non generava – e questo mio occhio non l'ha forse contemplato – quell'essere benedetto, un Cubo, con otto punti terminali? E in quattro dimensioni, un cubo in movimento non darà origine – ahimé per l'Analogia e ahimé per il Progresso della Verità se così non fosse – non darà origine, dicevo, il movimento di un cubo divino, a un organismo più divino con sedici punti terminali?».

I solidi a quattro dimensioni, trovarono negli studi di matematici, quali Stringham nel 1880 e Jouffret nel 1903, le prime significative rappresentazioni.

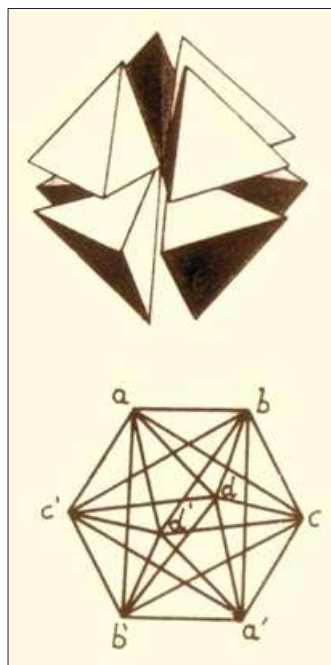


Figure regolari nello spazio a n-dimensioni di W. I. Stringham (1880).

Ritratto di
Ambroise Vollard,
di Pablo Picasso
(1909).



Le suggestioni di queste ricerche ebbero riscontri nel mondo artistico, in cui il **Cubismo** si pose la necessità di rappresentare l'oggetto da più punti di vista, sovrapponendo e intersecando le immagini, in una sintesi che presuppone lo spostamento. Pablo Picasso e Georges Braque furono i massimi rappresentanti di questa corrente artistica.

Nel 1923 Harold Coxeter iniziò le sue ricerche sulla **geometria a n-dimensioni** che pervennero alla pubblicazione nel 1948 del suo libro *Politopi regolari*, dove la parola *politopo* è il termine generale della sequenza *punto - segmento - poligono - poliedro*. Nella ricerca di Coxeter la dialettica con il mondo dell'arte fu sempre viva, come ad esempio con il grafico C.M. Escher, che precorse alcune scoperte del matematico e ne ebbe consigli e indicazioni operative.

Alcune delle geometrie non euclidee forniscono strumenti impiegabili in ambiti specifici; le geometrie sferiche, per esempio, possono trovare applicazione nella navigazione. Su una superficie sferica la linea più breve che unisce due punti non è un segmento di retta ma un arco di cerchio massimo e i lati dei triangoli sono archi.

Le geometrie di enti in movimento possono assumere come condizioni le caratteristiche dell'ambiente in cui si opera; la direzione dei raggi luminosi non è sempre rettilinea ma condizionata dall'ambiente circostante (fenomeno della rifrazione).

A seconda dei presupposti operativi e del comportamento degli oggetti presi in considerazione, si possono formalizzare sistemi teorici diversi e validi in relazione all'ambiente in cui si opera. Il *relativismo scientifico* ammette che si possano avere numerosi modelli interpretativi della realtà.

• Geometria e formazione

La vecchia geometria euclidea, forse più vicina ai modi di astrazione della cultura occidentale, fondata sul modello classico della scienza degli antichi greci, appare una delle possibili geometrie. Essa però conserva intatto il suo ruolo insostituibile nella formazione scientifica; l'uso di modelli astratti messi in relazione alla realtà ma autonomi da essa, la chiarezza di presupposti concettuali, il rigore del metodo dimostrativo sono un possente fondamento per fronteggiare l'offensiva semplificatrice di un sapere rivolto al «consumo di beni» o di mode scientifiche astruse e inorganiche che inducono una passiva memorizzazione di concetti incomprensibili.