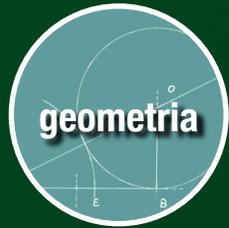


Emanuela Pulvirenti

La sezione aurea
scienza, natura, arte



LA SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO

La sezione aurea di un segmento è quella parte che è medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante.

«Si dice che una retta risulta divisa in estrema e media ragione, quando tutta quanta la retta sta alla parte maggiore di essa come la parte maggiore sta a quella minore» (Euclide)



$$AB : AC = AC : CB$$

La definizione del rapporto aureo viene fissata attorno al **VI sec. a.C.**, dalla **scuola pitagorica** (i discepoli di Pitagora), nell'Italia meridionale, dove **Ippaso di Metaponto** associò ad esso il concetto di incommensurabilità.

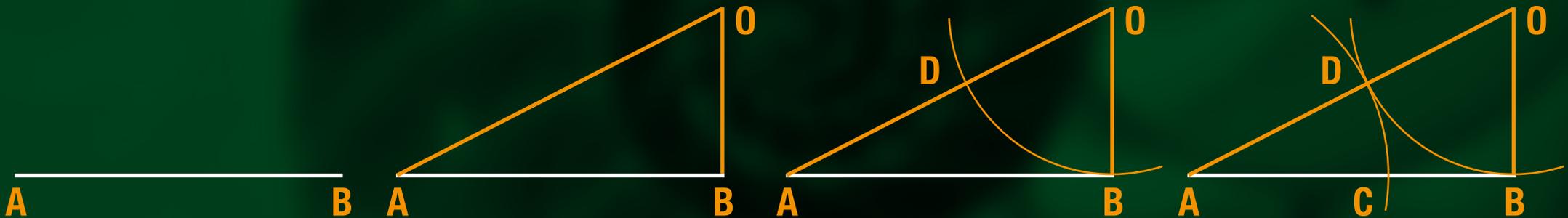
La definizione di rapporto aureo viene ricondotta allo studio del **pentagono regolare**; il pentagono è un poligono a 5 lati nel cui numero i pitagorici scorsero l'**unione del principio maschile e femminile** (rispettivamente nella somma del 2 col 3), tanto da considerarlo il numero dell'armonia universale.

L'**aura magica** che i pitagorici associavano al 5, e a tutto ciò che vi fosse legato, può spiegare come il rapporto aureo potesse apparire ai loro occhi tanto affascinante, pur ignorandone ancora gran parte delle proprietà matematiche, e giustificare in parte l'alone di mistero che lo ha avvolto sin dalla sua scoperta fino ai nostri giorni.



Per individuare graficamente con riga e compasso la **sezione aurea di un segmento AB** si traccia in B la **perpendicolare** ad AB di lunghezza pari a **$AB/2$** e la si congiunge con A.

Con apertura di compasso pari a **OB** si traccia **D** sull'ipotenusa del triangolo. Si riporta con il compasso **AD** sul segmento e si ottiene **AC**, **sezione aurea del segmento AB**.





aritmetica

LA SERIE DI FIBONACCI

Leonardo Fibonacci fu un matematico pisano della seconda metà del XII secolo. A lui si deve l'introduzione in Europa della **numera- zione indo-arabica** e l'**invenzione dello 0**. È noto soprattutto per una **sequenza** elaborata nel 1202 e nota, appunto, come serie di Fibonacci nella quale **ogni numero è somma dei due numeri pre- cedenti**:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89....

Più si va avanti e più il rapporto tra due numeri consecutivi si avvicina a **0,61803**, cioè al rapporto aureo. Dunque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{(n+1)}}{F_{(n)}} = \phi$$

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Leonardo Pisano(Leonardo Fibonacci), 1180

MATHEMATICS
UNIVERSAL
AESTHETICS



Dal punto di vista matematico, il numero aureo corrisponde a una delle due possibili soluzioni dell'**equazione di secondo grado**

$x^2 - x - 1 = 0$, le cui radici sono:

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1,618 \\ -0,618 \end{cases}$$

Tra le due soluzioni possibili, quella che ha un senso pure a livello geometrico è la **radice positiva**, ovvero il **numero irrazionale 1,618....**

In matematica questo valore veniva indicato fino al XX secolo con la lettera greca τ , fu il matematico Mark Barr a introdurre l'uso, oggi consolidato, della ϕ , dall'iniziale dello scultore greco **Fidia** (in greco $\Phiειδίας$), il quale avrebbe usato il rapporto aureo per creare le sculture del **Partenone**.

Il rapporto aureo è l'unico numero non naturale il cui reciproco e il cui quadrato mantengono inalterata la propria parte decimale:

$$\phi = 1,618033989$$

$$1/\phi = 0,618033989$$

$$\phi^2 = 2,618033989$$



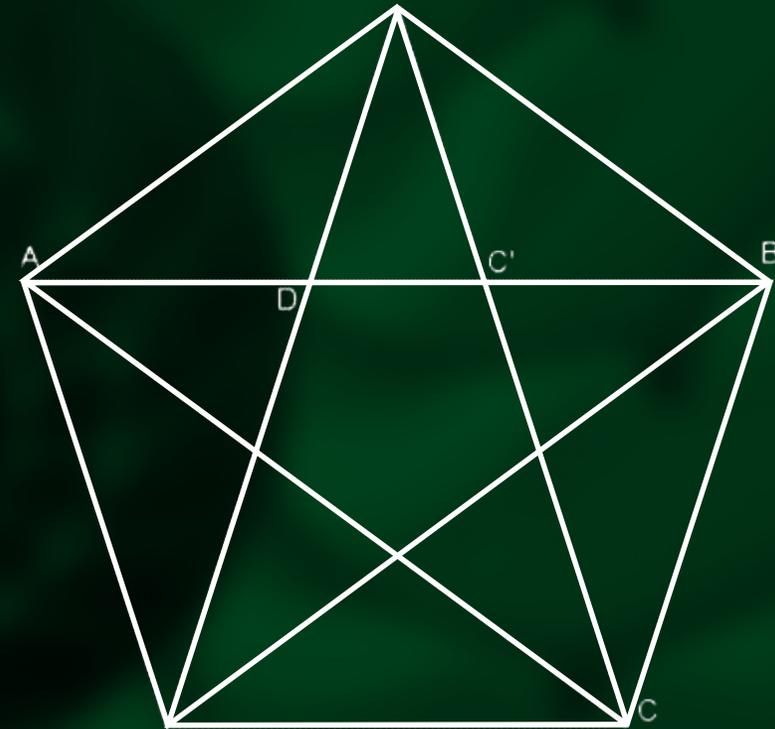


LE FIGURE GEOMETRICHE AUREE

La sezione aurea è connessa con la geometria del **pentagono** e con la stella a 5 punte, chiamata anche **pentagramma**, in esso inscritta (che, non a caso, era il simbolo di riconoscimento dei **pitagorici**).

Il lato BC è sezione aurea della diagonale AB . Ma anche BD è sezione aurea di AB e BC' lo è di BD . Se poi all'interno del **pentagono stellato** si inscrive un'altra stella si produce uno **schema ricorsivo**.

La **geometria pentagonale** è abbondantemente presente in **natura** e dimostra l'**origine scientifica e biologica** della sezione aurea.



approfondimenti sul **pentagono stellato**



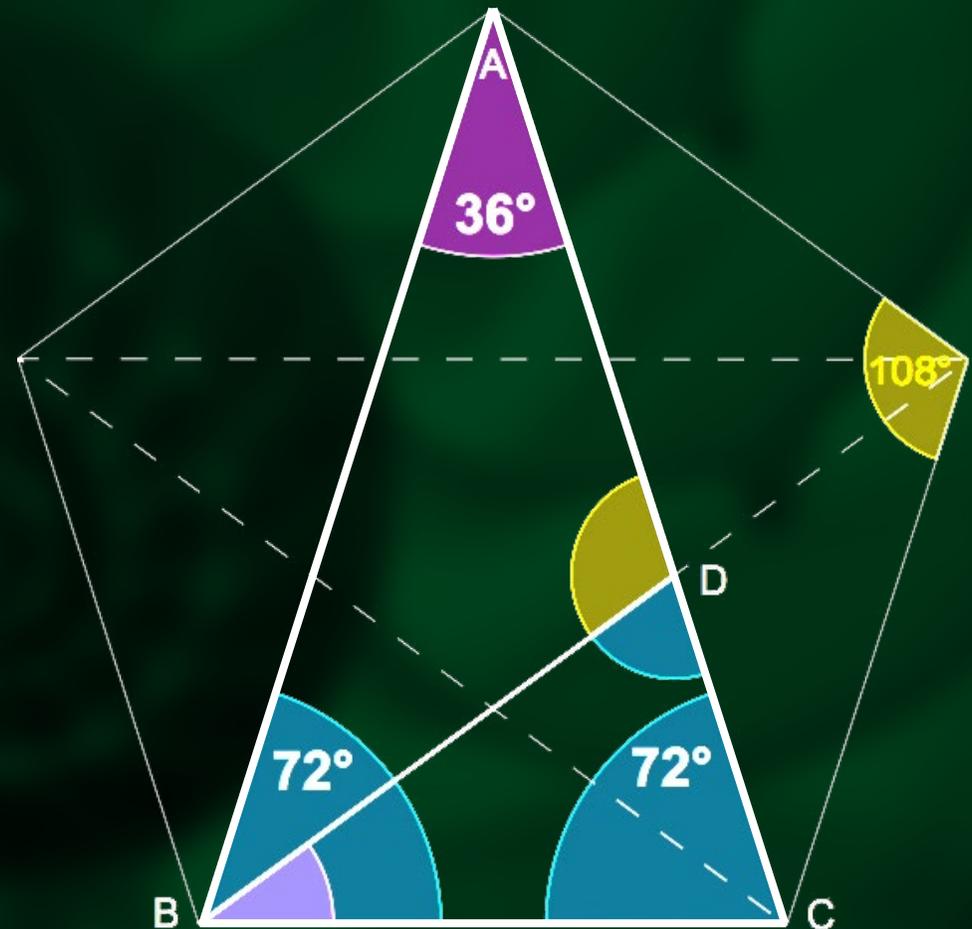
Un'altra figura geometrica che presenta proporzioni auree è il **triangolo isoscele** i cui angoli alla base misurino 72° e angolo al vertice di 36° (si tratta comunque di uno dei 5 triangoli che compongono la stella).

La bisettrice di un angolo alla base divide il lato obliquo opposto in due segmenti in modo tale da creare una **sezione aurea**.

Infatti **il triangolo ABC è simile al triangolo BCD**. E da questo risulta che:

$$AC:BC=BD:DC \quad \text{e dunque:} \quad AC:AD=AD:DC$$

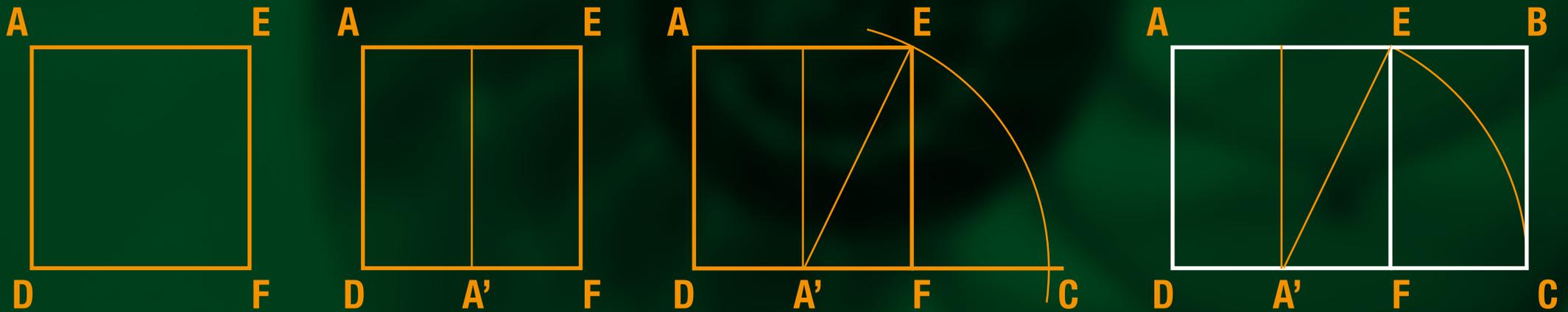
cioè AD è medio proporzionale tra AC e DC.



Esiste uno speciale **rettangolo aureo** nel quale il rapporto tra i lati corrisponde alla sezione aurea.

Per costruire il rettangolo aureo si disegni un **quadrato** di lato **a** i cui vertici sono, a partire dal vertice in alto a sinistra e procedendo in senso orario, AEFD. Quindi si divida il segmento AE in due chiamando il **punto medio A'**. Utilizzando il **compasso** e puntando in A' disegnare un **arco** che da E intersechi il prolungamento del segmento DF in **C**. Con una squadra disegnare il **segmento CB** perpendicolare ad DF, ed il segmento EB, perpendicolare a EF. **Il rettangolo ABCD è un rettangolo aureo** nel quale il lato AB è diviso dal punto E esattamente nella sezione aurea:

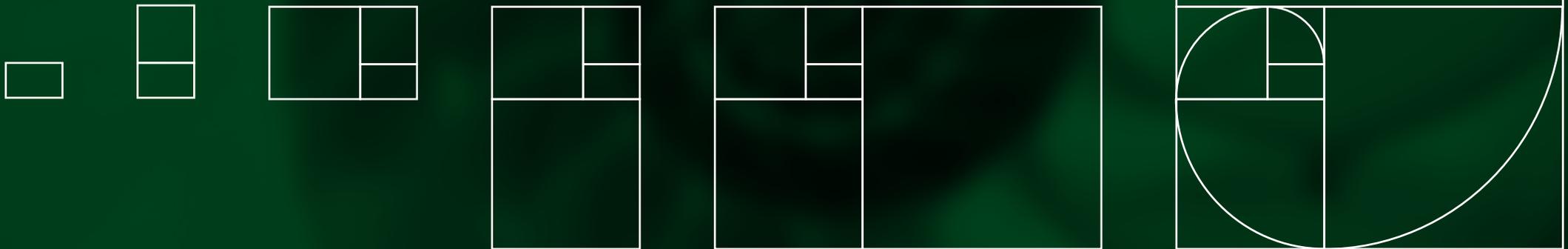
$$AE:EB=AB:AE$$



Se ad un rettangolo aureo si aggiunge un quadrato sul lato maggiore si ottiene **un altro rettangolo** aureo disposto in verticale. Se a questo si aggiunge un quadrato si ottiene un altro rettangolo aureo e così via.

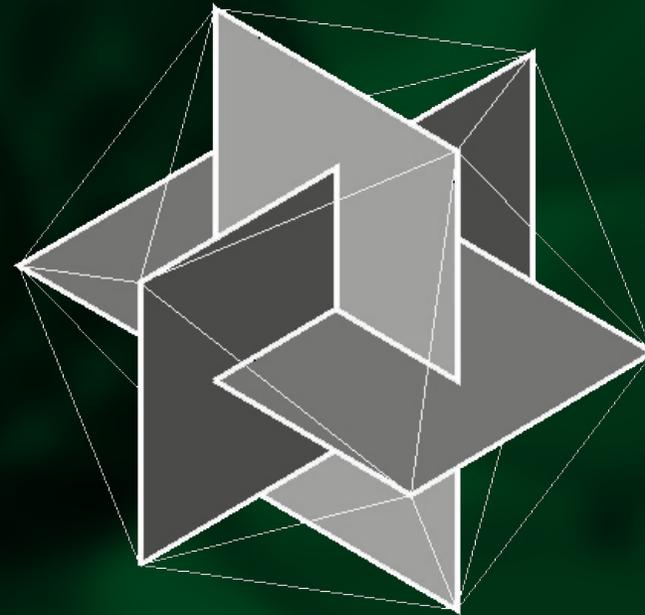
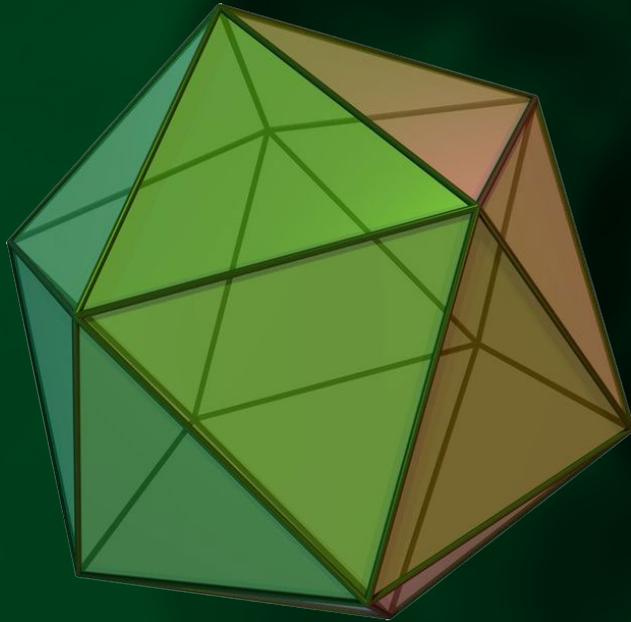
Se in ogni quadrato si traccia con il compasso un **arco** che abbia per centro l'angolo interno in basso e per apertura il lato del quadrato, si ottiene una **spirale aurea**, una particolare spirale logaritmica con fattore di accrescimento pari alla sezione aurea.

La spirale aurea si può ritrovare in molte conchiglie (Nautilus).



Le proporzioni auree si trovano anche in alcuni **solidi platonici**, come l'**icosaedro regolare**, poliedro composto da **20 triangoli equilateri** che Luca Pacioli (un matematico del '500) riuscì a costruire attraverso l'intersezione di **tre rettangoli aurei** disposti secondo i tre assi.

Unendo i dodici vertici dei rettangoli si ottengono le 20 facce dell'icosaedro.

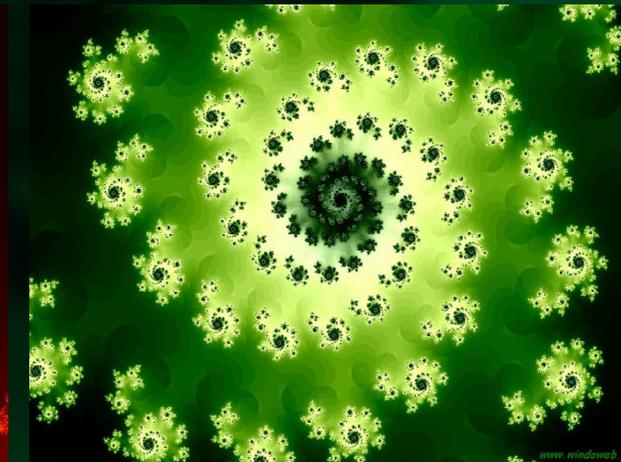




I FRATTALI AUREI

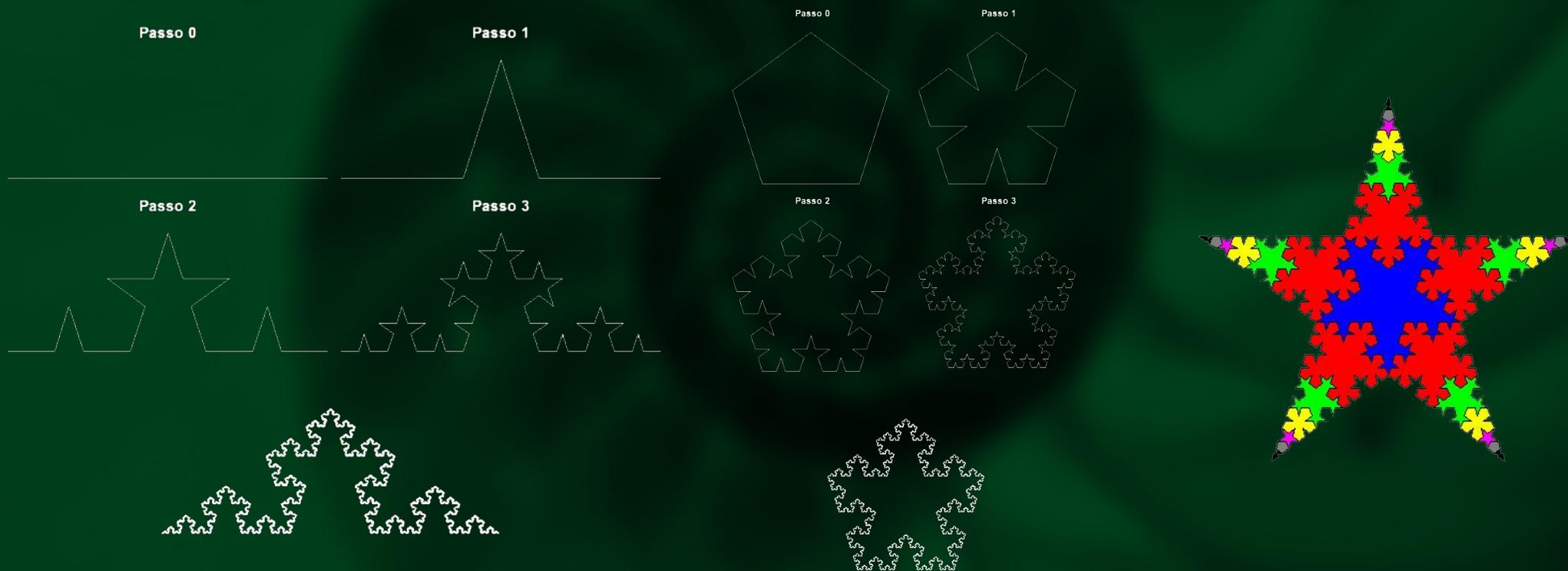
Un frattale è un **oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse**, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento.

Questa caratteristica è spesso chiamata **auto similarità**. Il termine frattale venne coniato nel 1975 da **Mandelbrot**, e deriva dal latino **fractus** (rotto, spezzato), così come il termine frazione; infatti le immagini frattali sono considerate dalla matematica **oggetti di dimensione frazionaria**.



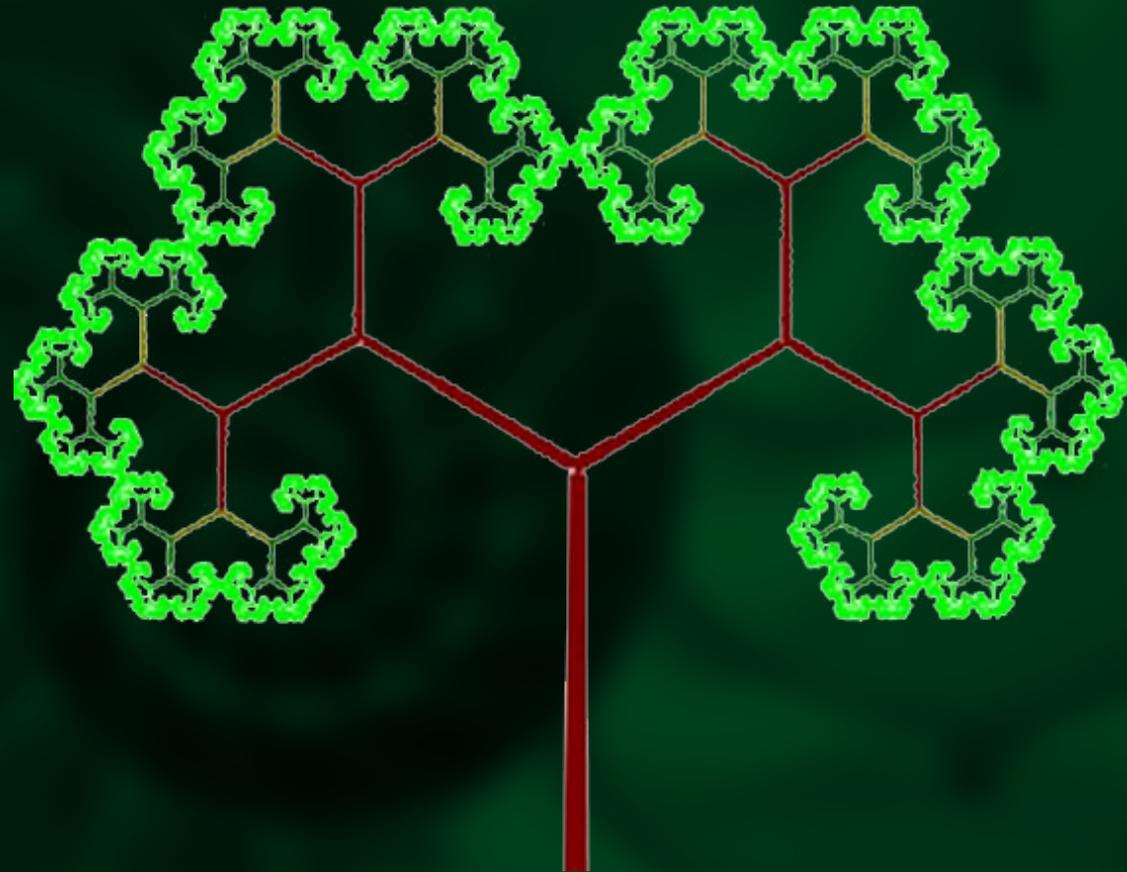
I frattali possono essere costruiti sulla sezione aurea. In particolare si può realizzare il “**merletto**” di Koch sulla base di un **triangolo aureo**. La particolarità del frattale finale sta nel fatto che tutti i triangoli isosceli che si vengono a formare sono tutti aurei.

Frattali simili si possono creare partendo da altre figure auree come il **pentagono** e il **pentagramma**.



Un frattale aureo molto famoso è l'**albero di Barnsley** nel quale ogni segmento è **sezione aurea di quello precedente** e subisce una deviazione di 60° .

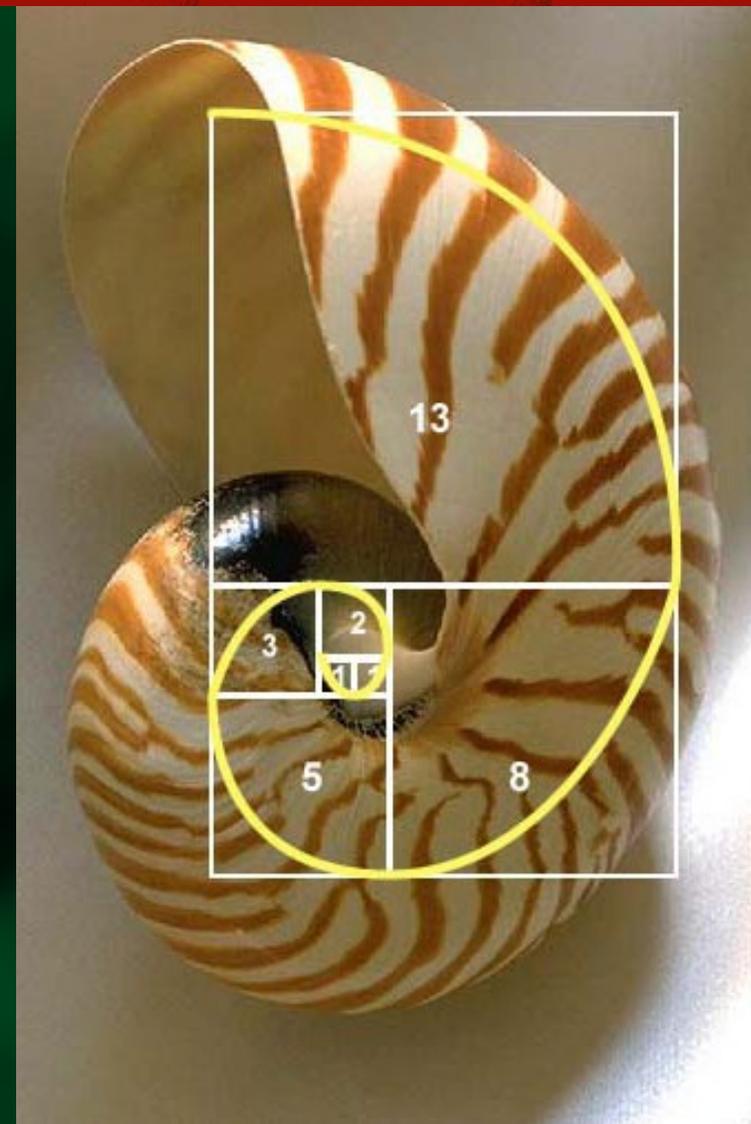
In natura questo tipo di crescita è molto frequente.





LA SEZIONE AUREA IN ZOOLOGIA

Il più celebre esempio di sezione aurea in natura è costituito dalla conchiglia del **Nautilus**, una perfetta spirale logaritmica.



La spirale aurea si presenta anche nelle corna del muflone... e nella coda dell'ippocampo.



La **geometria pentagonale** è anch'essa molto frequente nel mondo animale, in particolare tra gli **echinodermi**.



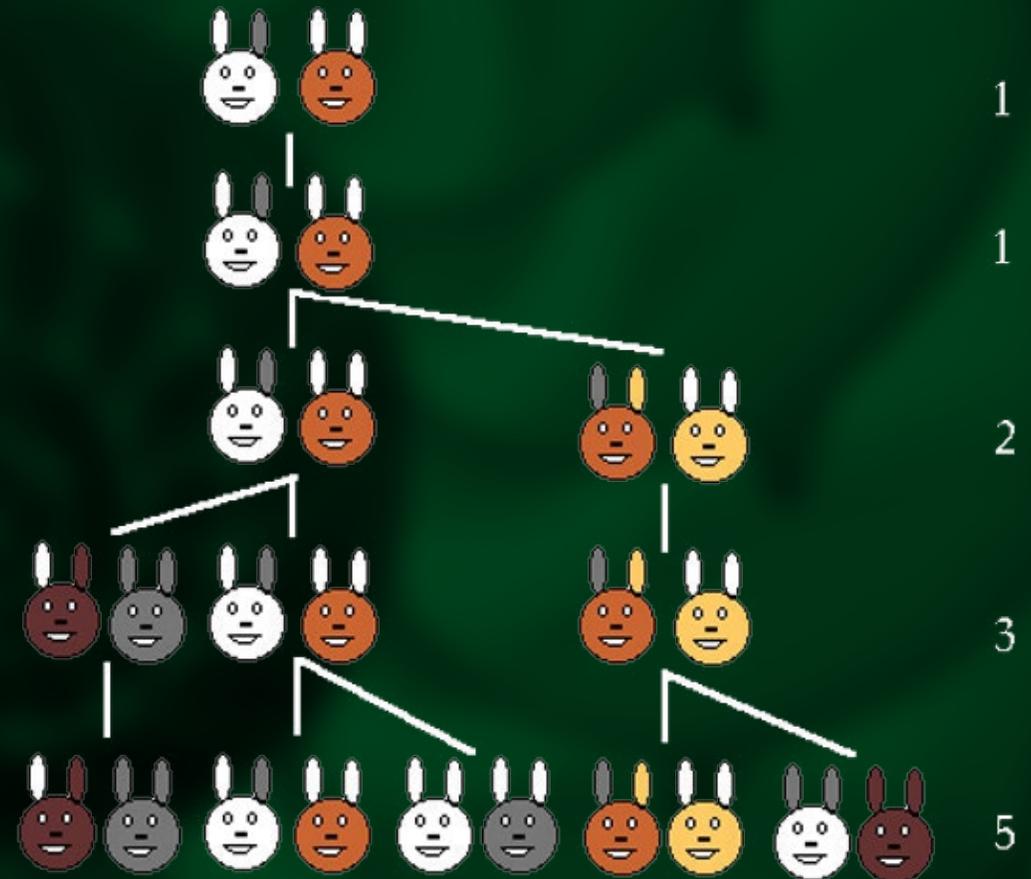
La serie di Fibonacci, è una progressione che il matematico ha elaborato per risolvere un quesito teorico legato al mondo degli animali: immaginiamo di chiudere una **coppia di conigli** in un recinto. Sappiamo che ogni coppia di conigli:

- a) inizia a generare dal secondo mese di età;
- b) genera una nuova coppia ogni mese;
- c) non muore mai.

Quanti conigli ci saranno nel recinto dopo un anno?

La risposta si ottiene sommando ogni mese le quantità dei due mesi precedenti ed ottenendo dunque la serie.

Come sappiamo il rapporto tra un numero della serie e quello precedente tende alla **sezione aurea**.



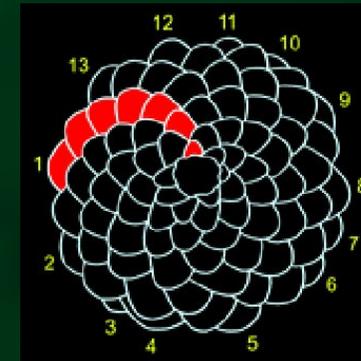
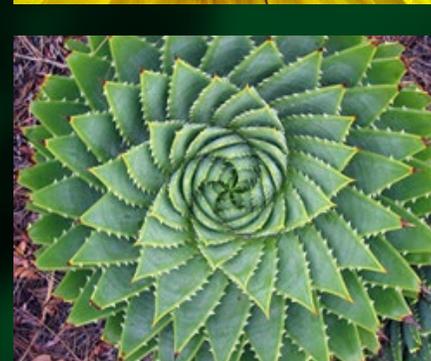
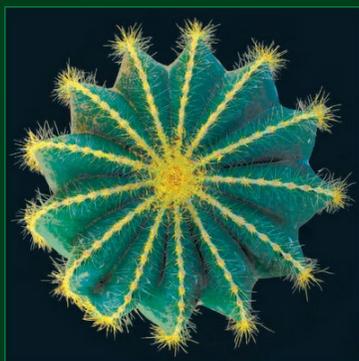


LA SEZIONE AUREA IN BOTANICA

Nel regno vegetale si trovano molte varianti della sezione aurea: tantissimi sono i **fiori a 5 petali** (pentagonali) ma molti fiori presentano un numero di petali pari ad **altri numeri della serie di Fibonacci** (13, 55 e perfino 377).



Molti vegetali presentano una **geometria stellare** o una **struttura con spirali auree** costruite su un numero della serie di Fibonacci. Questo conferisce una **forma armonica e "ottimizzata"**.





LA SEZIONE AUREA NEI FENOMENI FISICI

Galassie, tornadi e vortici seguono indistintamente il disegno di una **spirale aurea**.



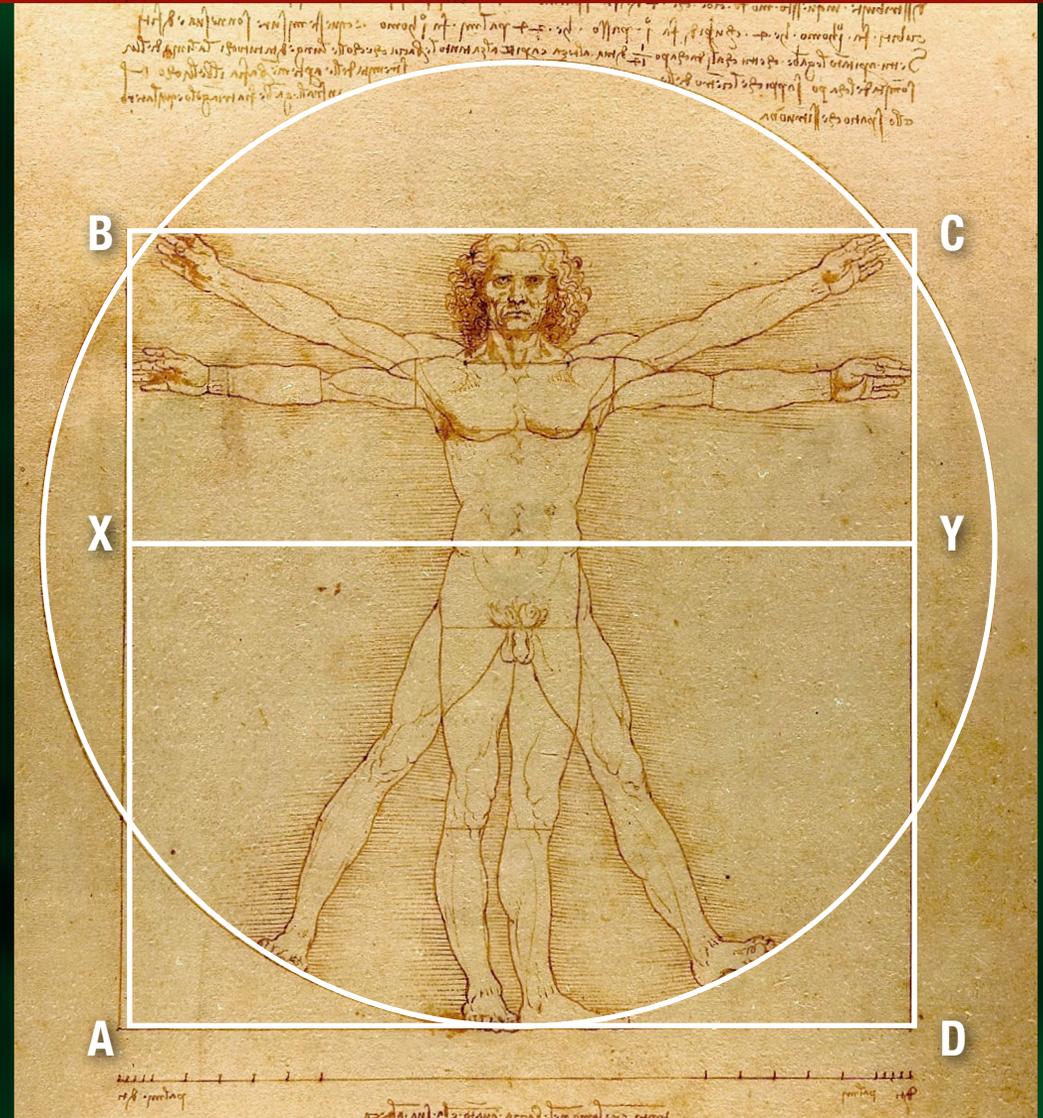


LA SEZIONE AUREA NELL'UOMO

Famosa è la rappresentazione di **Leonardo** dell'**uomo di Vitruvio** in cui una persona è inscritta in un quadrato e in un cerchio.

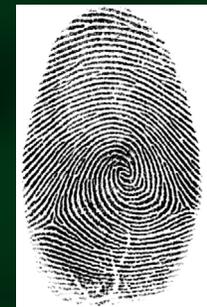
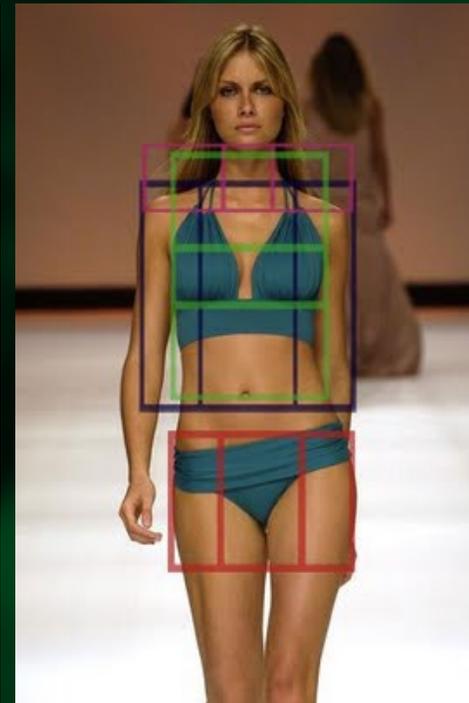
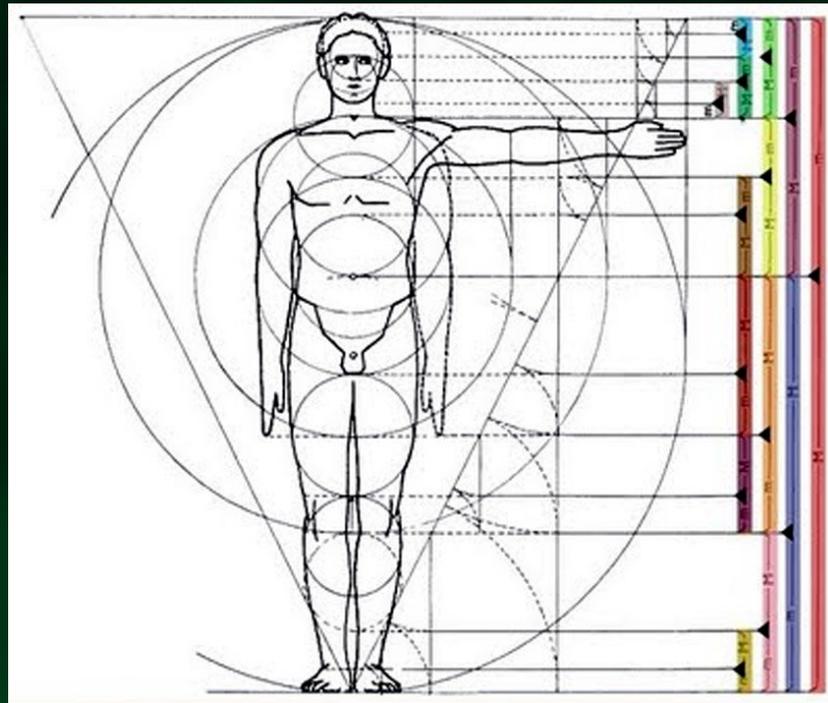
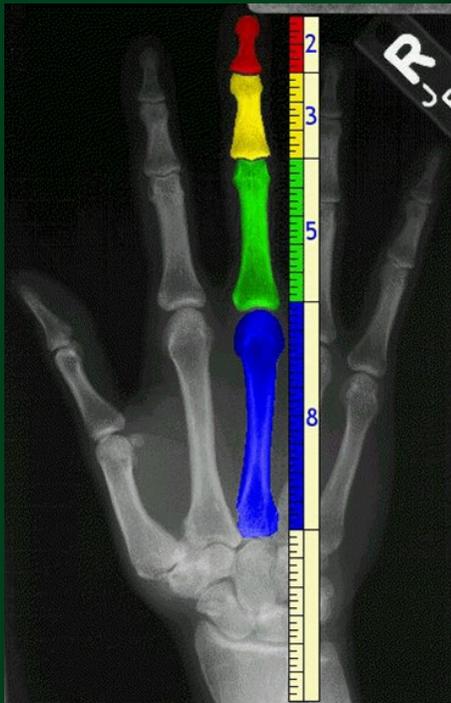
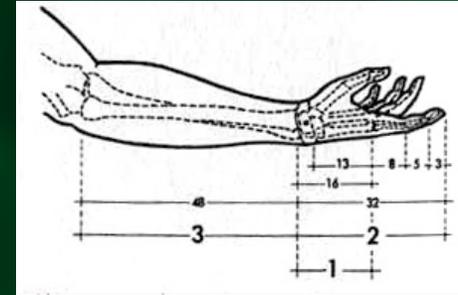
Nel quadrato, l'altezza dell'uomo (AB) è pari alla distanza (BC) tra le estremità delle mani con le braccia distese. La **retta X-Y** passante per l'**ombelico** divide i lati AB e CD in due parti in rapporto aureo tra loro.

Lo stesso ombelico è anche il centro del cerchio che inscrive la persona umana con le braccia e gambe aperte. La posizione corrispondente all'ombelico è infatti ritenuta il **baricentro del corpo umano**.



Oltre all'altezza da terra dell'ombelico e l'altezza complessiva, è aureo anche il rapporto tra la distanza dal collo del femore al ginocchio e la **lunghezza dell'intera gamba** o il rapporto tra la distanza tra gomito e punta del dito medio e la **lunghezza dell'intero braccio**.

Se misuriamo le **dita** della nostra mano, noteremo che i rapporti tra le lunghezze delle **falangi** del dito medio e anulare sono aurei.



Se si esamina un **volto considerato "bello"** è facile scoprire come le distanze tra gli elementi che compongono il viso sono strettamente legati alla **proporzione aurea**:

A/a = tra l'altezza e larghezza del viso.

B/b = posizione della linea degli occhi rispetto al mento ad alla fronte.

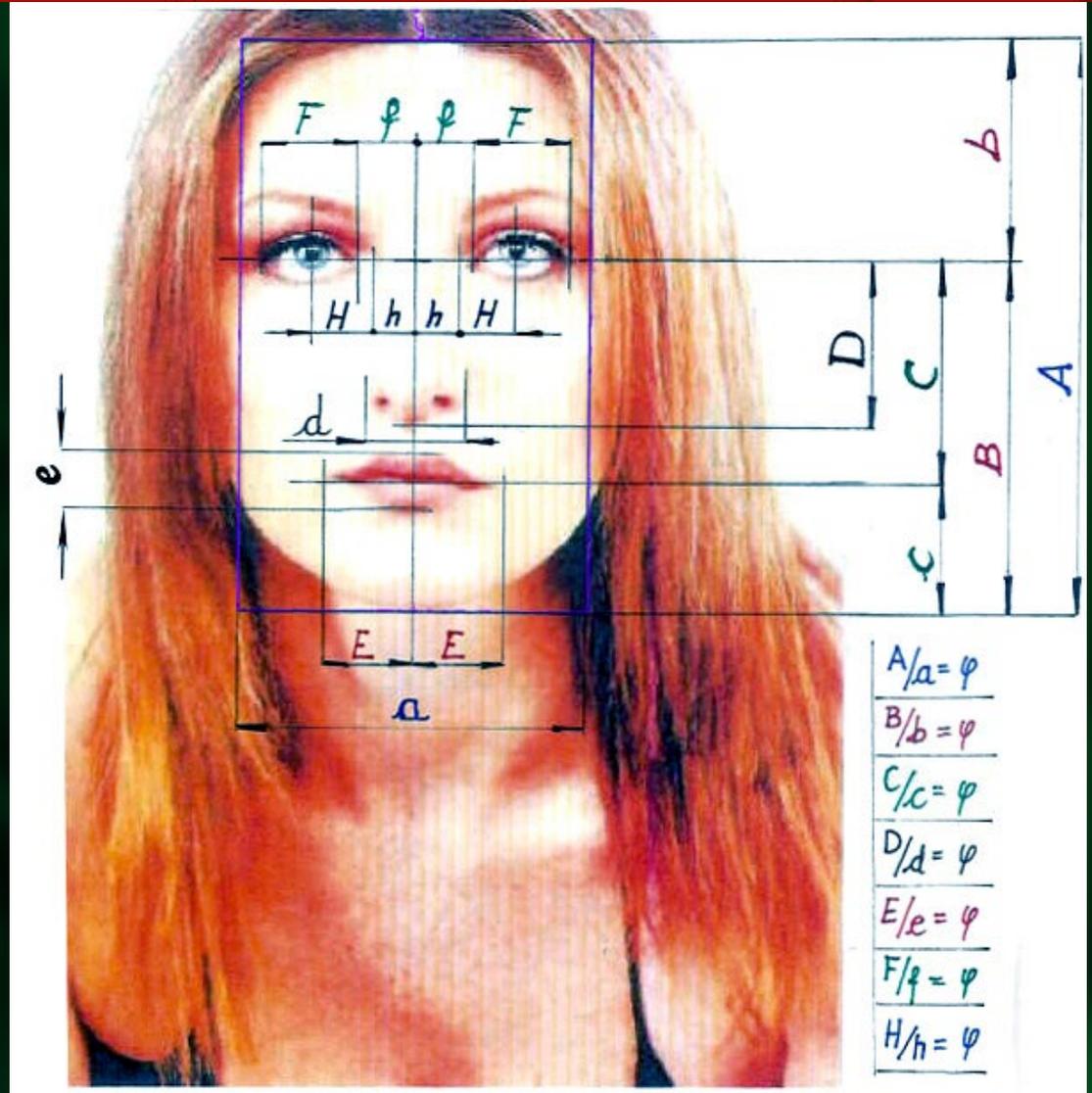
C/d = posizione della bocca rispetto al mento ed agli occhi.

D/d = altezza e larghezza del naso.

E/e = lunghezza ed altezza del profilo della bocca.

F/f = larghezza degli occhi e la loro distanza.

H/h = distanza degli occhi rispetto al centro di simmetria del viso.

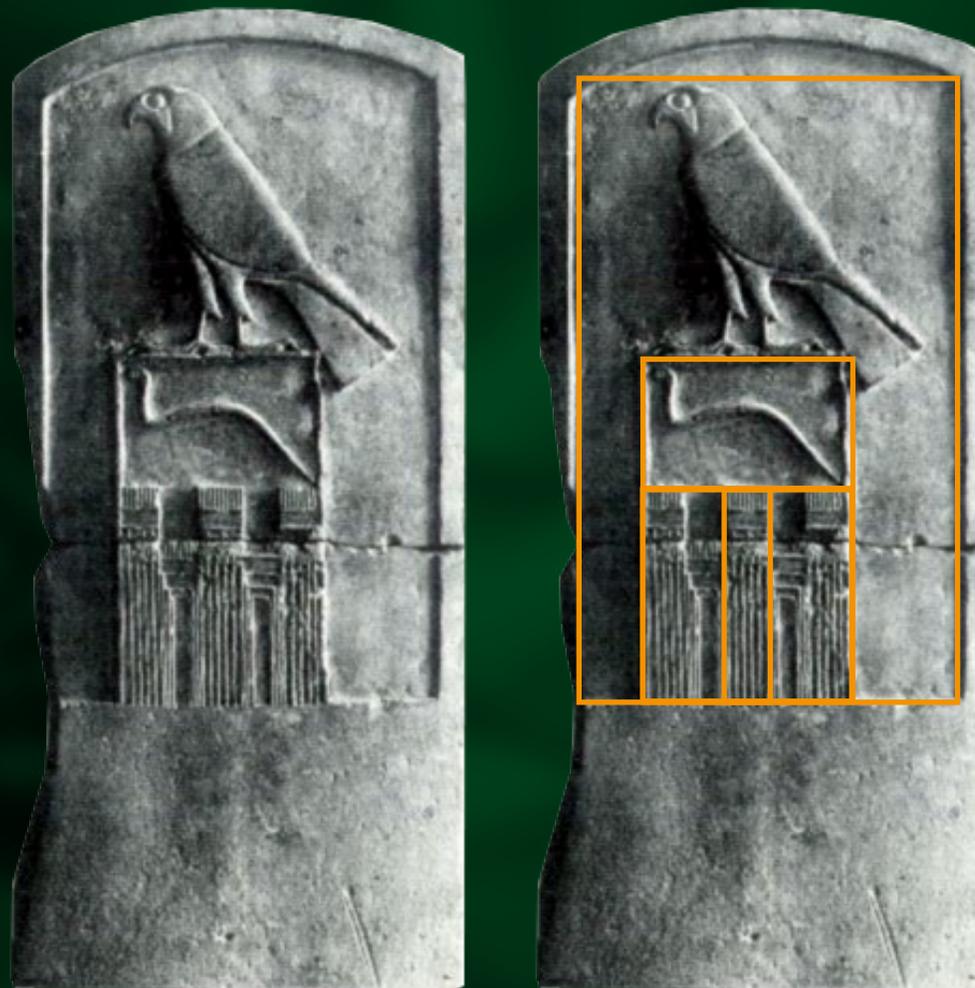




LA SEZIONE AUREA NELLA SCULTURA

Una delle opere più antiche nella quale si riscontra chiaramente la sezione aurea è la **stele di Get**, un bassorilievo egizio risalente alla prima dinastia (circa 5000 anni fa).

Qui si osserva al centro un **rettangolo aureo**, nella cui parte bassa il quadrato costruito sul lato più corto, sezione aurea di quello più lungo, contiene la città mentre nella parte rimanente, che per quanto visto sopra è ancora un rettangolo aureo, è riportato il serpente simbolo del re.



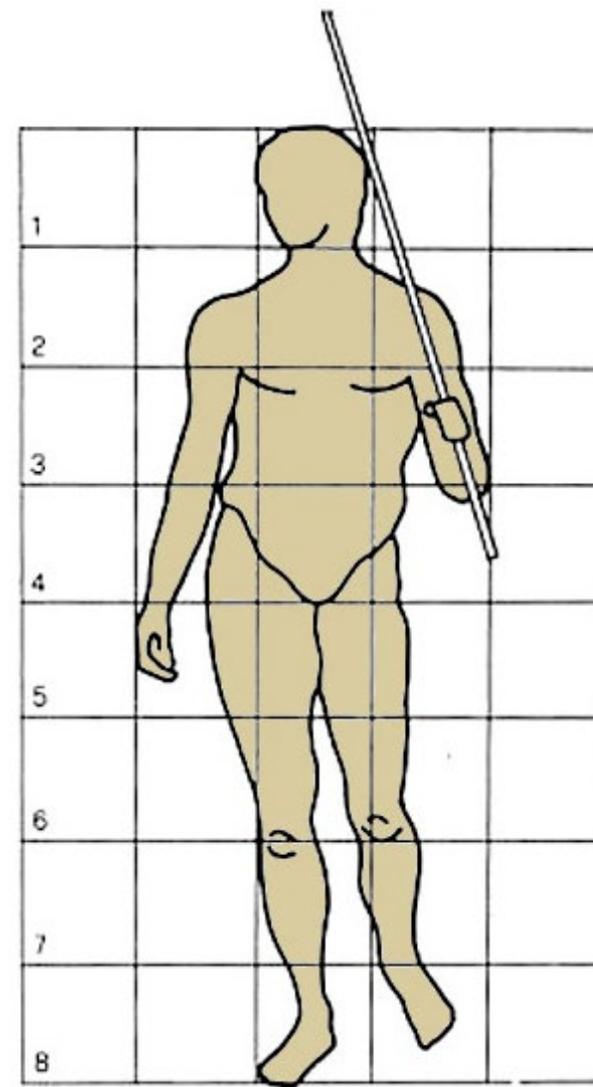
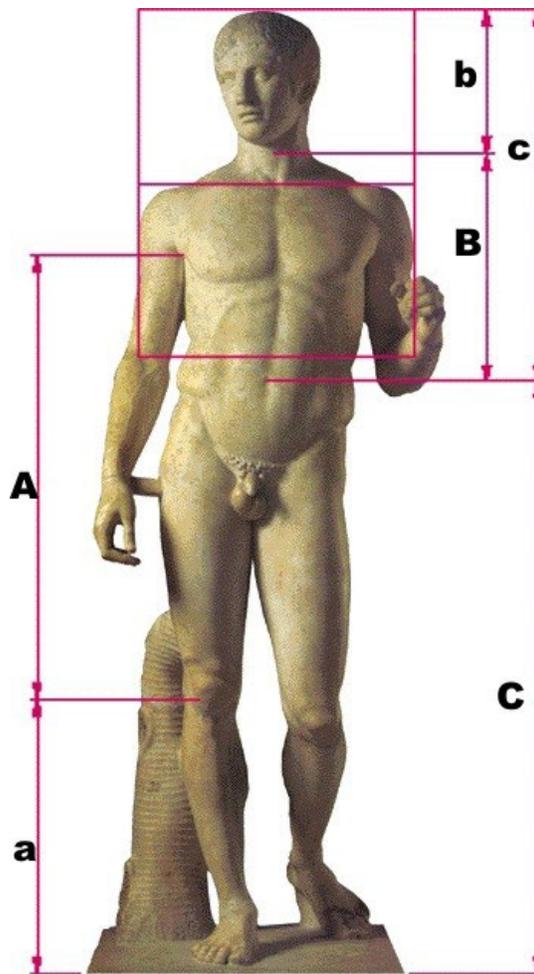
Anche la **maschera egizia del faraone Tutankhamon** (XIV sec. a.C.) possiede proporzioni auree: in questo caso è perfettamente inscritta in un pentagono e segue le diagonali che formano il **pentagramma**.



Nella **scultura greca classica** (Fidia, Policleto...) la sezione aurea diventa una regola imprescindibile.

Ogni parte del corpo è in proporzione aurea con le altre. Questo è particolarmente evidente nel **Doriforo** (450 a.C.) di Policleto.

Non è un caso, poi, che Policleto abbia teorizzato la divisione del corpo in **8 parti**: **5** corrispondono all'altezza da terra all'ombelico e le altre **3** alla parte superiore. I numeri 3, 5 e 8 sono presenti nella **serie di Fibonacci** e, come sappiamo, sono in rapporto aureo.



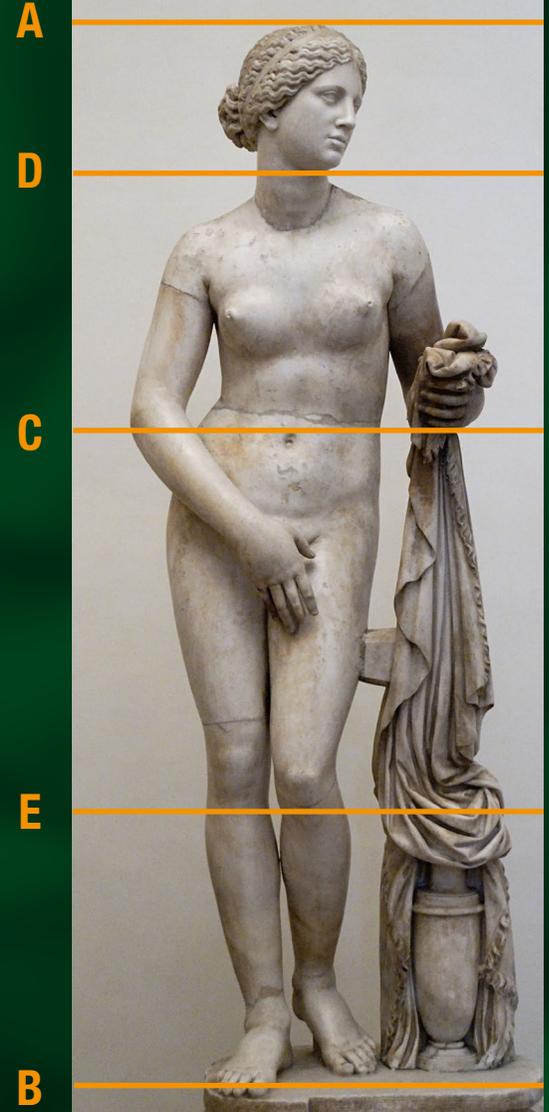
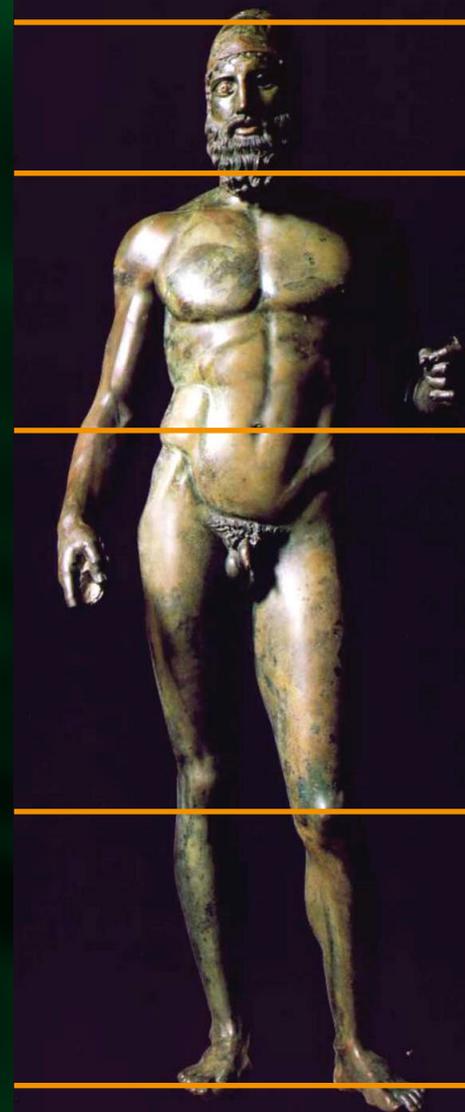
Le stesse perfette proporzioni si ritrovano nei **Bronzi di Riace** (V sec. a. C.) e nell'**Afrodite Cnidia** di Prassitele (360 a. C.).

In particolare si possono riconoscere, in entrambe le sculture, i **seguenti rapporti**:

$$AB : CB = CB : AC$$

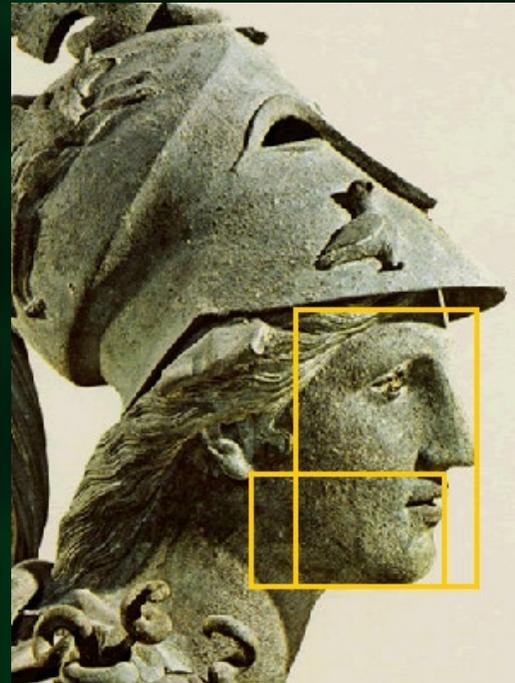
$$AC : DC = DC : AD$$

$$CB : CE = CE : EB$$



Le **cariatidi** dell'Eretteo, sull'Acropoli di Atene, possono essere inscritte in una serie di **rettangoli** nei quali il rapporto tra altezza e lunghezza è un rapporto aureo.

Anche nella statua bronzea di **Athena del Pireo** (IV sec. a. C.) si ritrovano i rettangoli aurei.



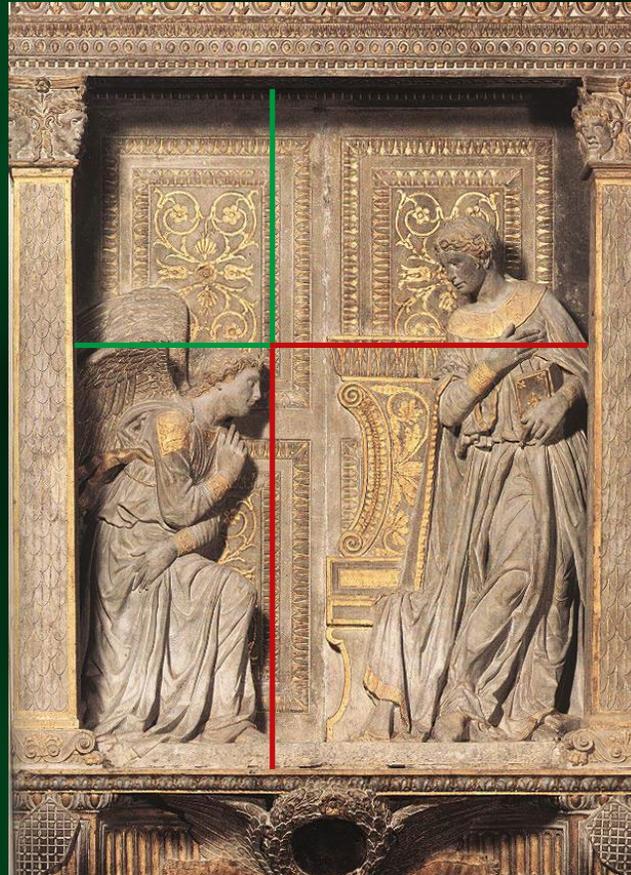
La **scultura romana**, ispirandosi a quella greca, mantiene approssimativamente le stesse proporzioni.

Con il **medioevo**, a partire dall'arte paleocristiana, passando per quella bizantina e romanica, la sezione aurea non è più utilizzata: le forme umane sono spesso volutamente sproporzionate e stilizzate.

Con la **scultura del Trecento**, nel periodo dell'**arte gotica**, il numero aureo tornerà, con la sua aura esoterica, ad informare sculture ed architetture. Lo si ritrova nella formella "**L'aratura**" di **Andrea Pisano**.



Nel Primo Rinascimento si trovano esempi di proporzioni auree nella scultura di **Donatello** (**Annunciazione**, 1435 e **Madonna col Bambino**).



Facendo un salto temporale di 6 secoli è possibile trovare un esempio di **opera d'arte concettuale** di **Mario Merz** che non utilizza la sezione aurea, bensì la **serie di Fibonacci**.

I numeri della serie, riprodotti con neon rosso, sono installati sulla cupola della **Mole Antonelliana** di Torino.





LA SEZIONE AUREA NELLA PITTURA

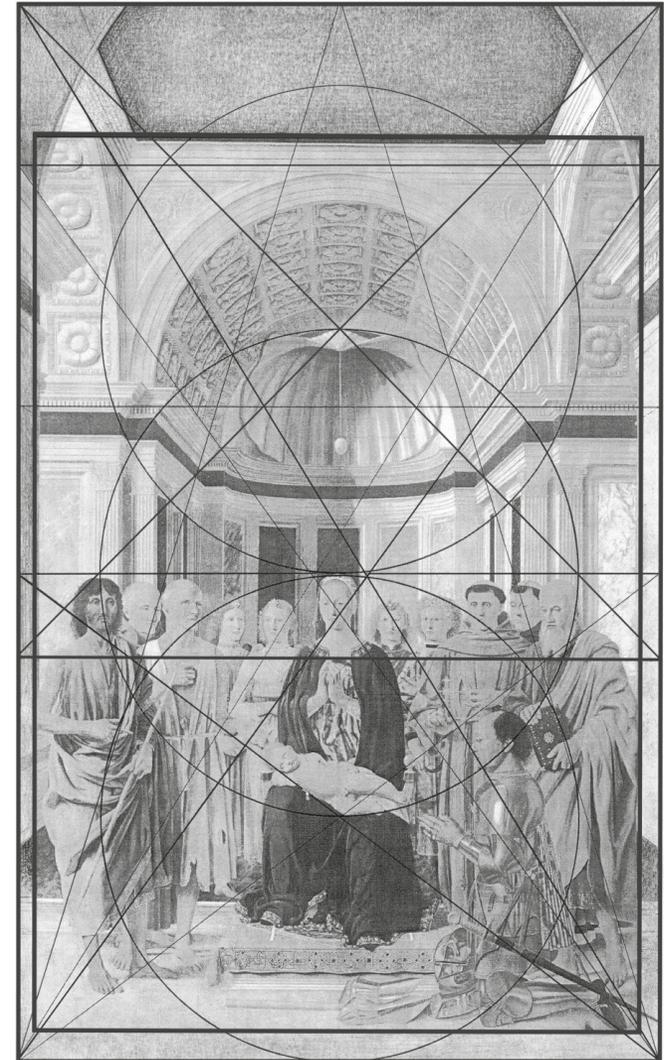
Gli **artisti del Rinascimento**, interessati a tutto ciò che è classicità e razionalità, furono molto affascinati dalle proporzioni auree. Uno tra i primi ad utilizzarla nei suoi dipinti è stato **Piero della Francesca** (1412-1492).

Ne **“La flagellazione di Cristo”** e nella **“Pala Brera”** le proporzioni auree tra le parti sono numerose e conferiscono equilibrio e armonia.

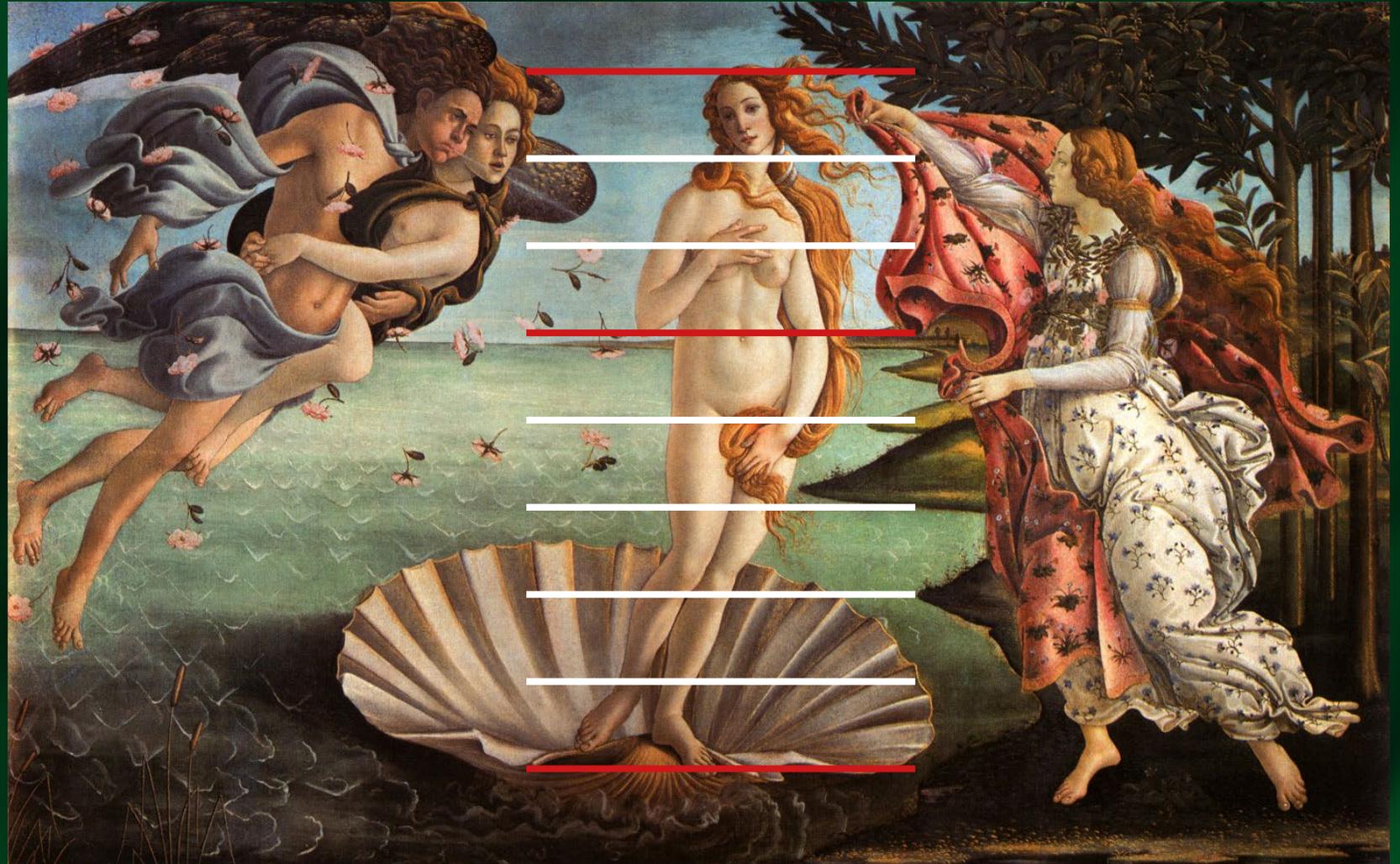


Nella **Pala Brera**, nonostante le mutilazioni su tutti i lati, è evidente una costruzione aurea molto complessa.

Lo stesso **formato originale** del dipinto era costituito da un rettangolo aureo.

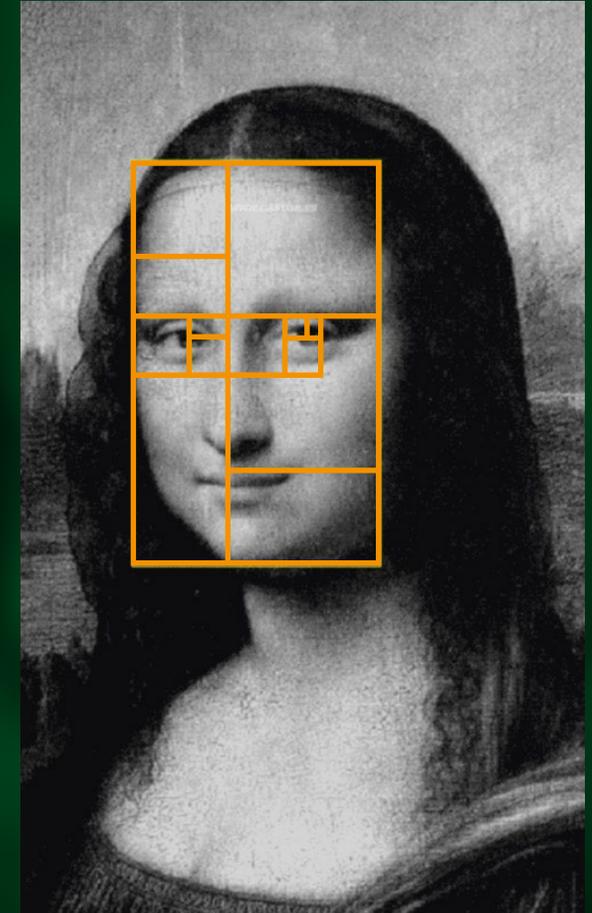
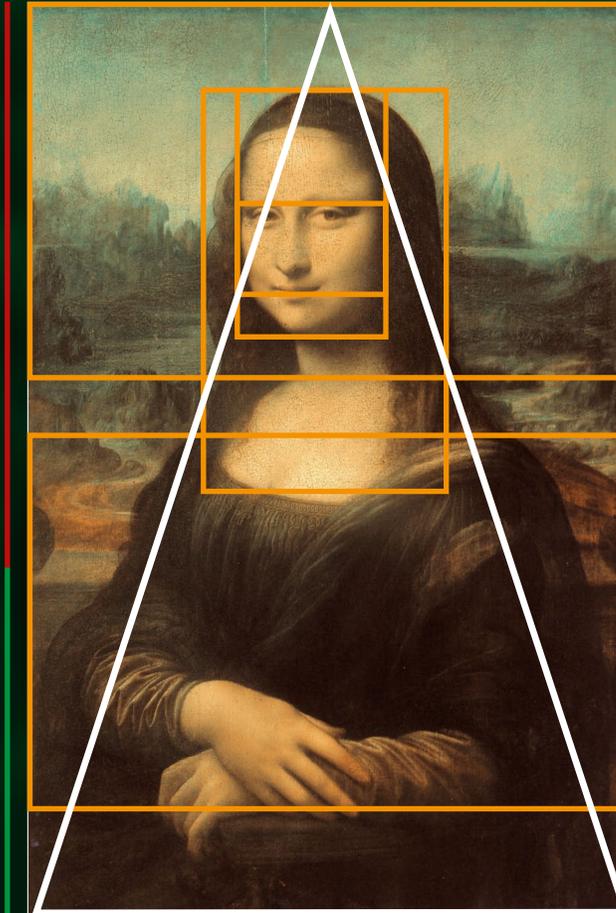


Sandro Botticelli (1445-1510) costruiva le sue figure femminili secondo le proporzioni auree classiche, come nella **Nascita di Venere**.

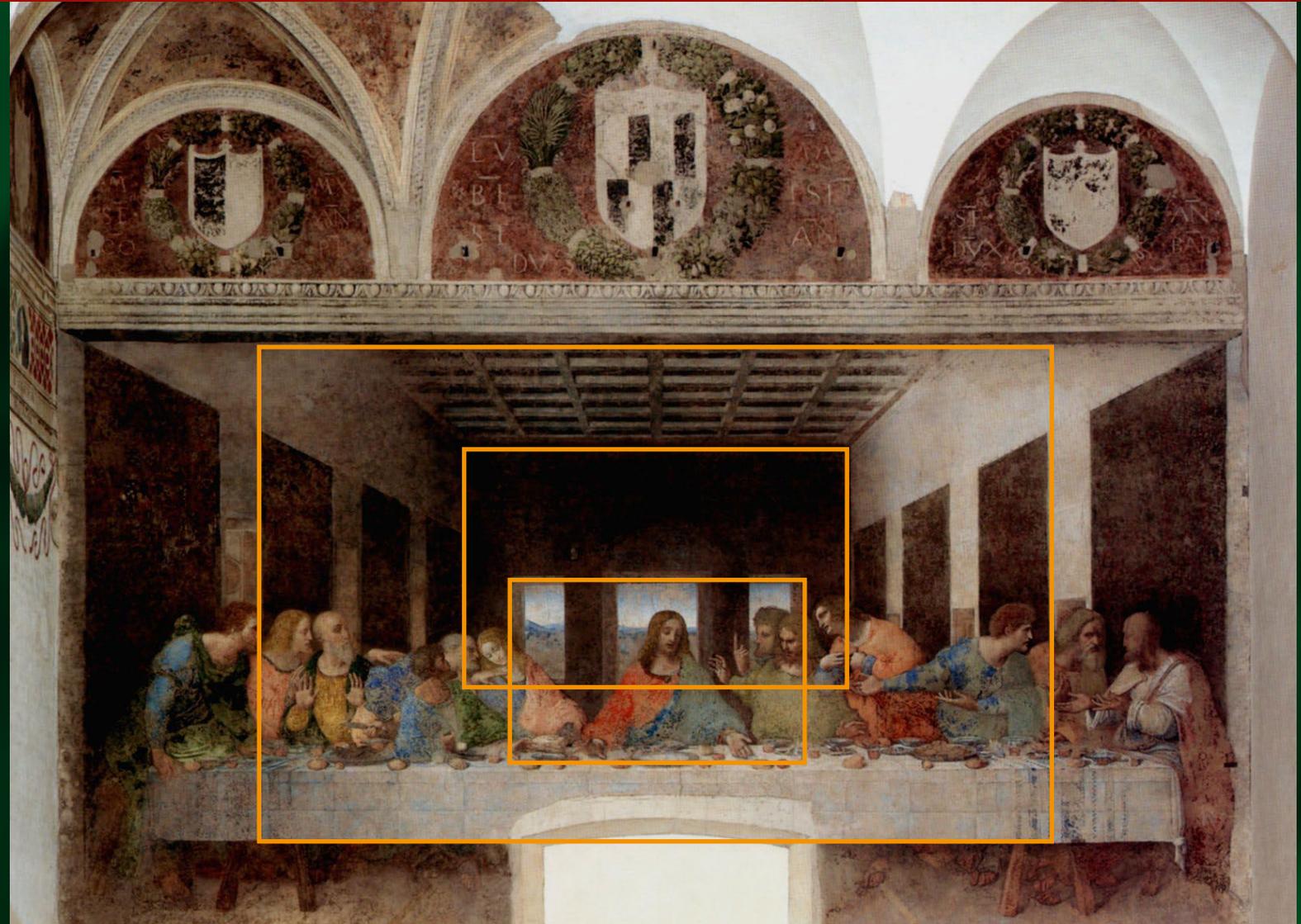


Leonardo da Vinci (1452-1519), nella sua doppia veste di **scienziato** e di **artista**, indagò a fondo sulla sezione aurea.

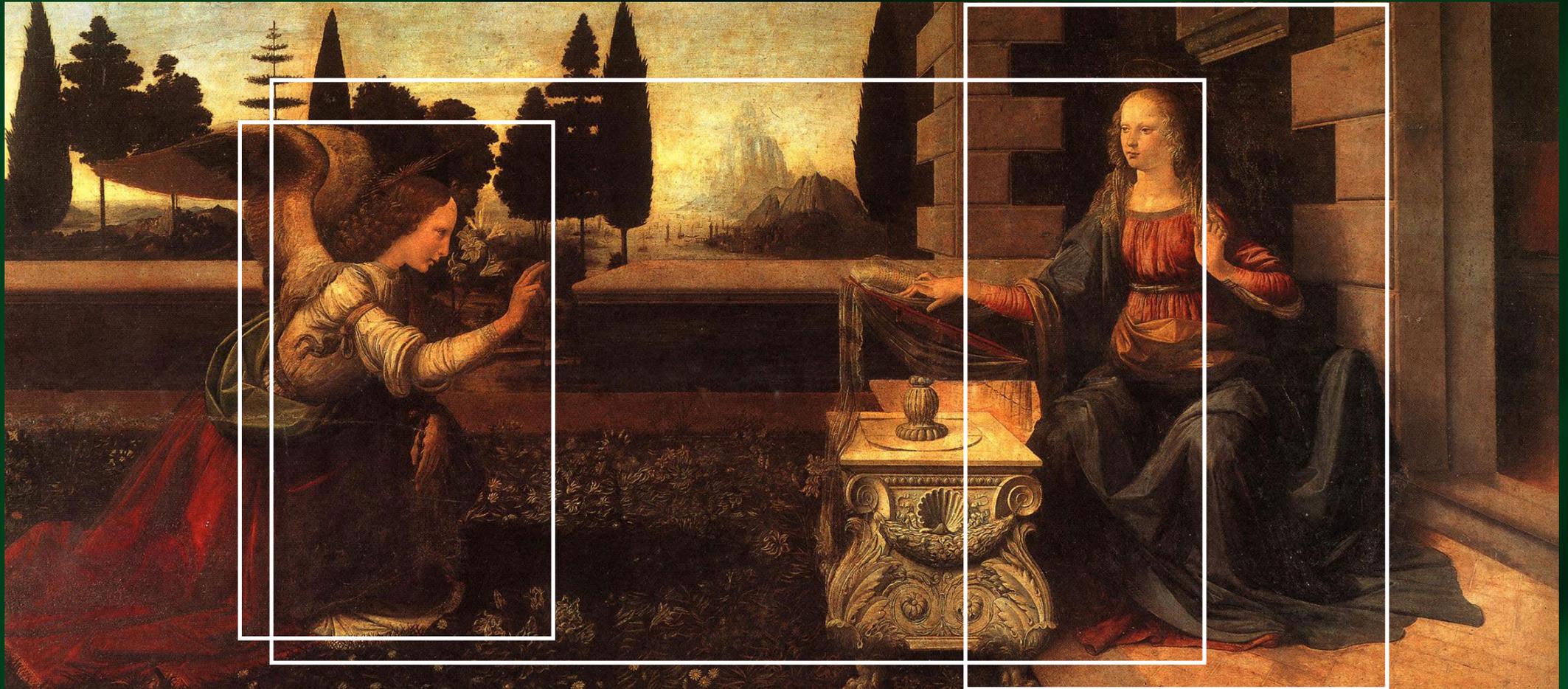
La applicò alla sua celebre **Gioconda** (è aurea la divisione del lato verticale, il rettangolo che contiene il viso, le aree del petto e delle braccia etc. etc.)



Nel dipinto murale del **Cenacolo** leonardesco, la figura di Cristo è racchiusa in un rettangolo aureo che include perfettamente anche le finestre.

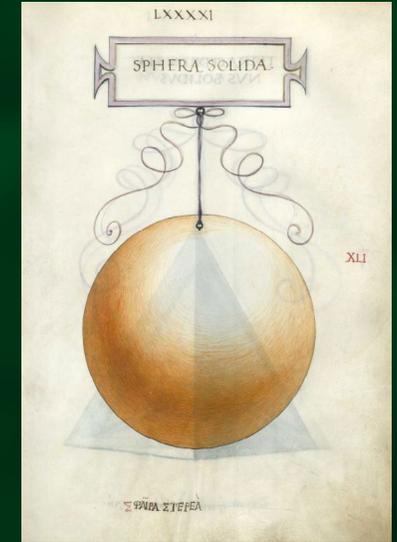
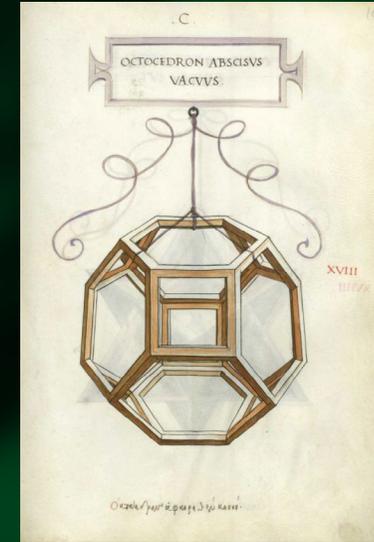
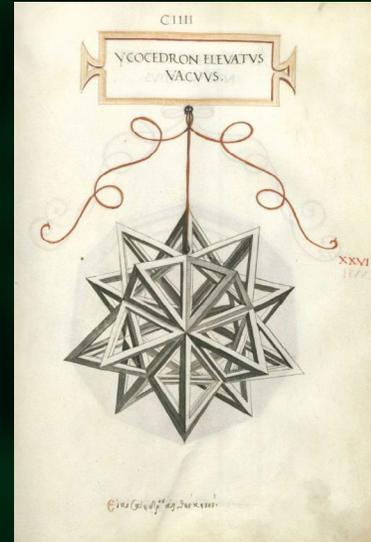
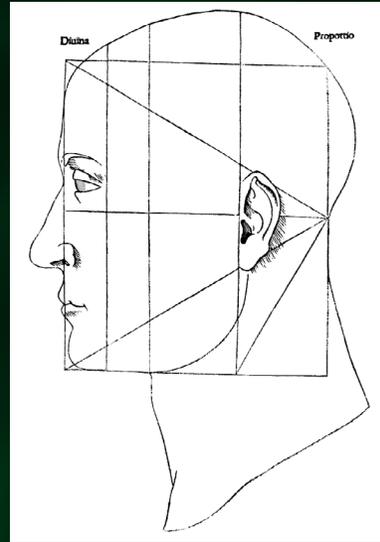


Nell'**Annunciazione** di Leonardo molte aree sono in rapporto aureo.



Leonardo da Vinci, oltre al disegno dell'Homo ad circulum, illustrò con 60 disegni il trattato “De divina proportio-
ne” del matematico **Luca Pacioli**, del 1509.

Il questo saggio Pacioli ricercò nel **rapporto aureo** i principi ispiratori in architettura, scienza e natura e studiò solidi e poliedri di ogni tipo. Il libro ebbe grande fortuna nel XVI sec. ed ispirò molti artisti.



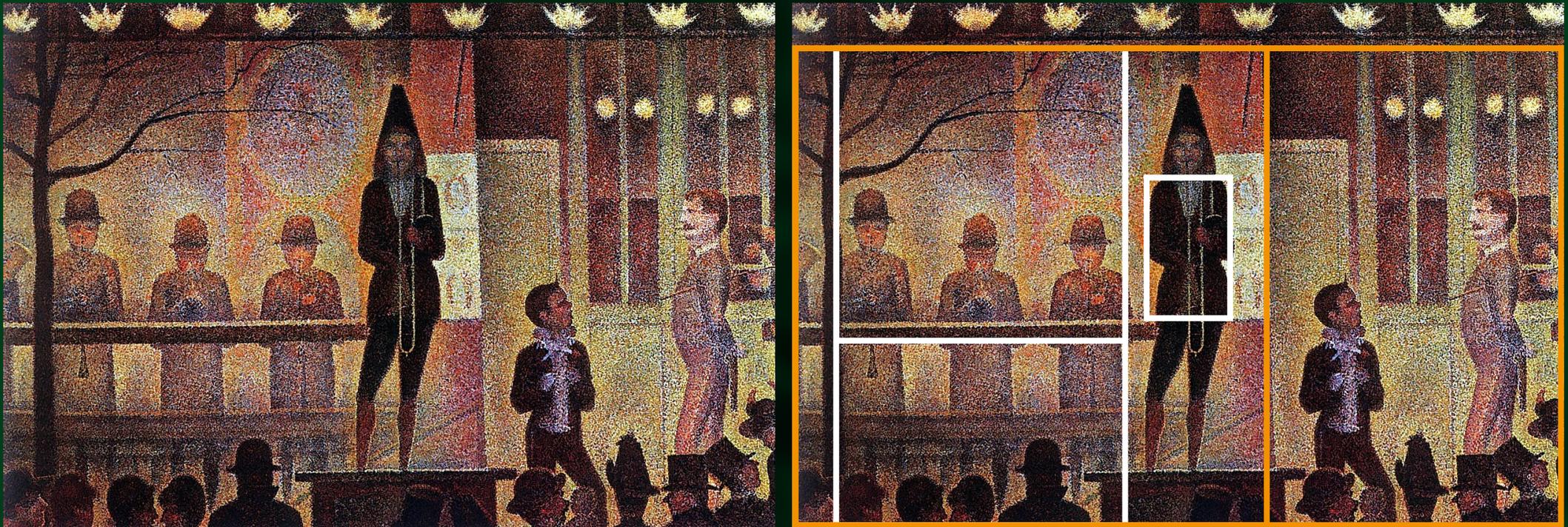
Nella Sacra Famiglia (**Tondo Doni**) di **Michelangelo** (1475-1564) le figure principali si trovano all'interno di un **pentagramma**.

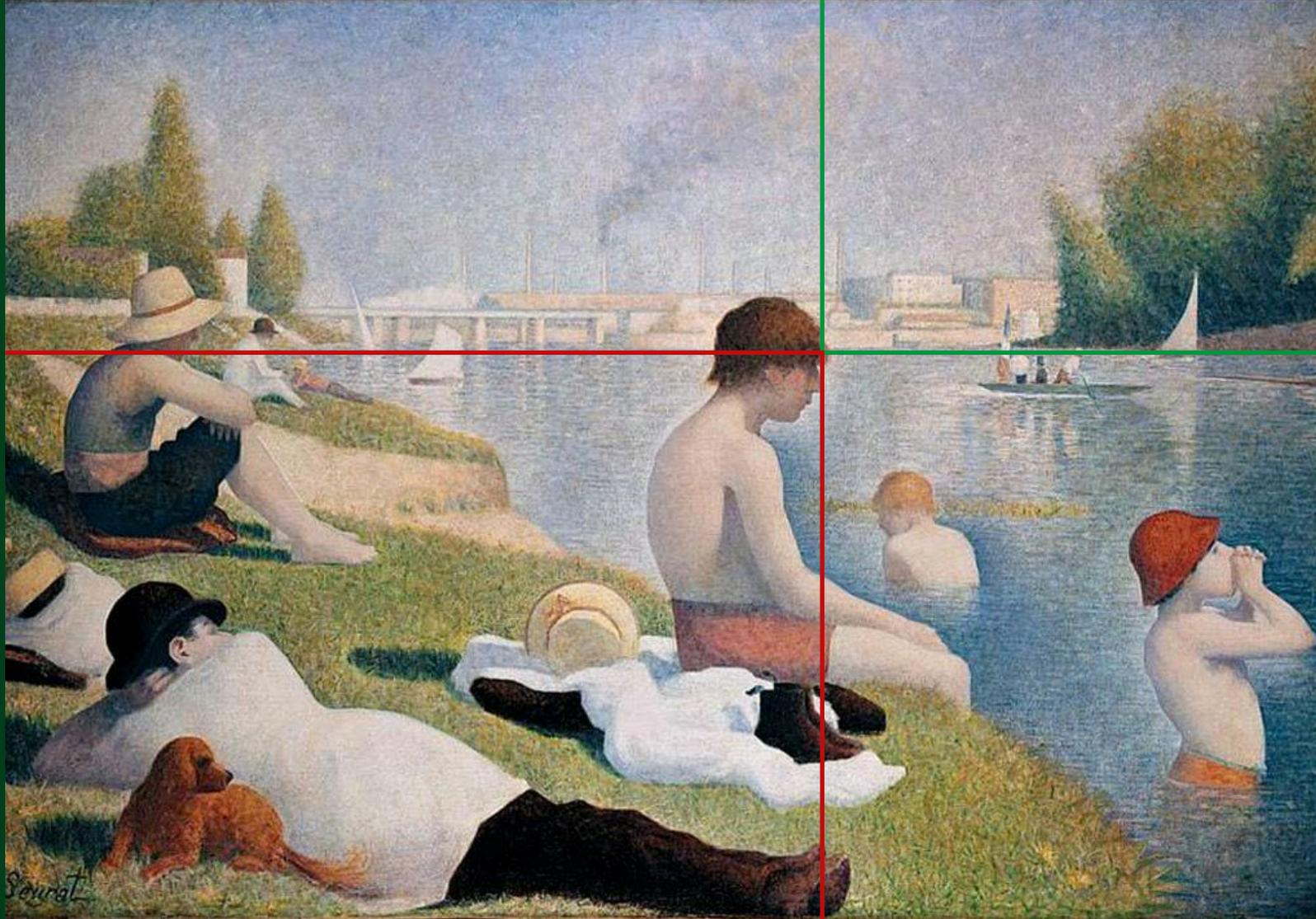


Nella **Crocifissione di Raffaello** (1483-1520) le figure sono disposte lungo le linee di un **pentagramma**.



Passando all'**arte contemporanea** è possibile ritrovare la sezione aurea nelle opere di **Seurat** (1859-1891), un artista **postimpressionista** che cercava una **bellezza "scientifica"** nelle sue opere attraverso l'accostamento cromatico di punti di colori differenti e la **composizione equilibrata dell'immagine**.



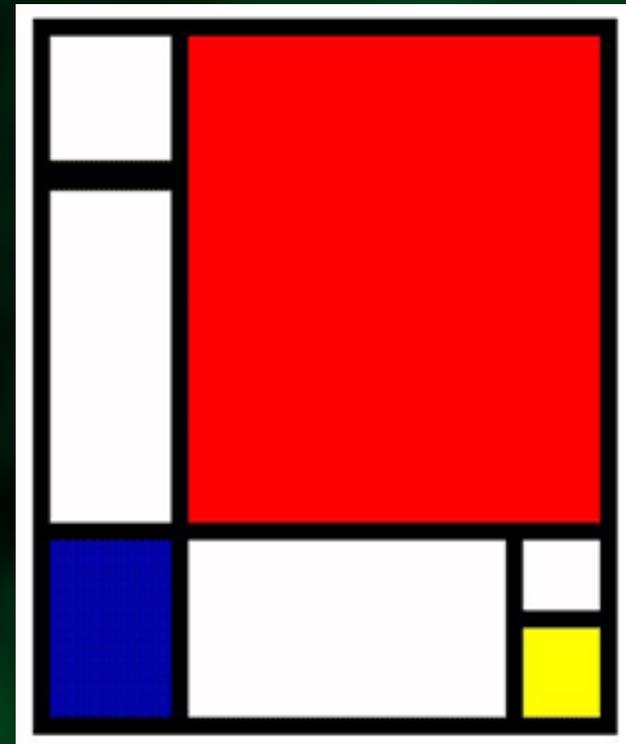


Nell'opera **"Bagnanti"** si ritrovano diversi rapporti aurei.



Un altro interessante esempio di **composizione basata sui rapporti aurei** può essere tratto dall'opera di **Piet Mondrian** (1872-1944).

L'artista si è concentrato a tal punto sulla **ricerca di strutture geometriche armoniche** che queste sono diventate l'essenza stessa delle sue opere.



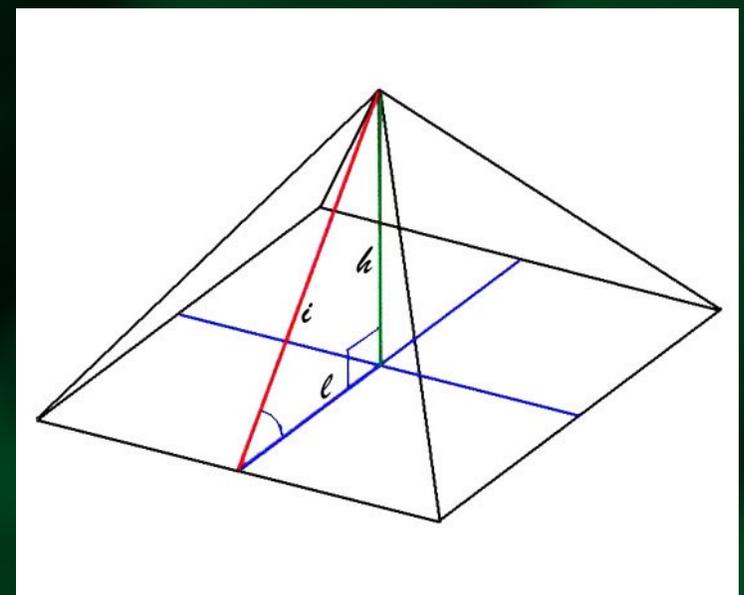


LA SEZIONE AUREA IN ARCHITETTURA

La sezione aurea potrebbe essere stata utilizzata nella **Piramide di Cheope**. Il rapporto aureo sussiste fra il **semilato della piramide l** e l'**altezza della facciata triangolare i** costruibile sulla stessa.

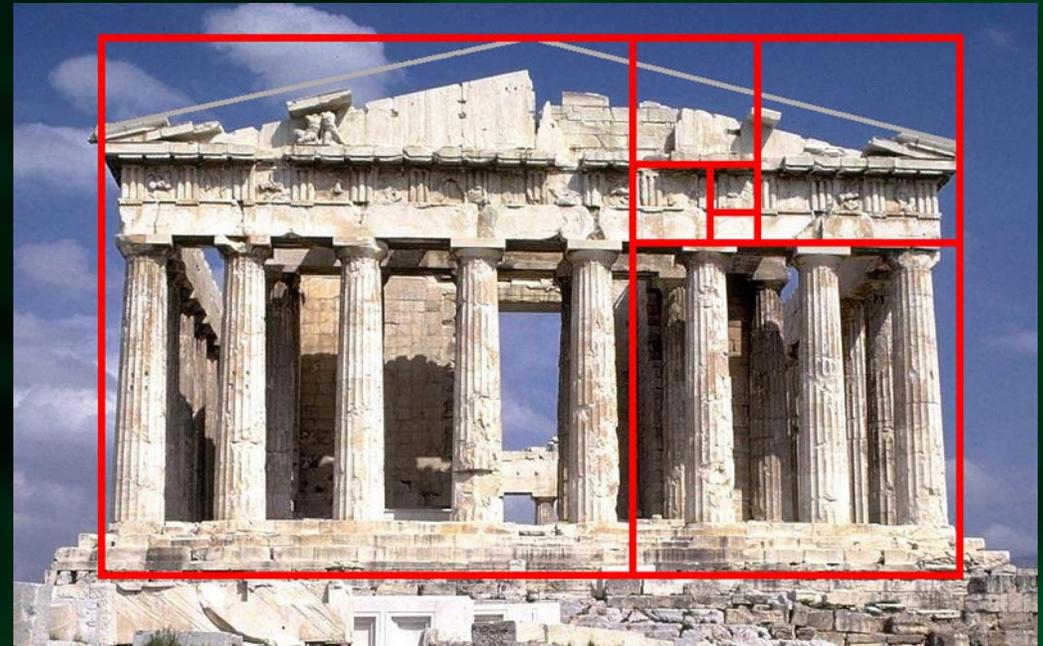
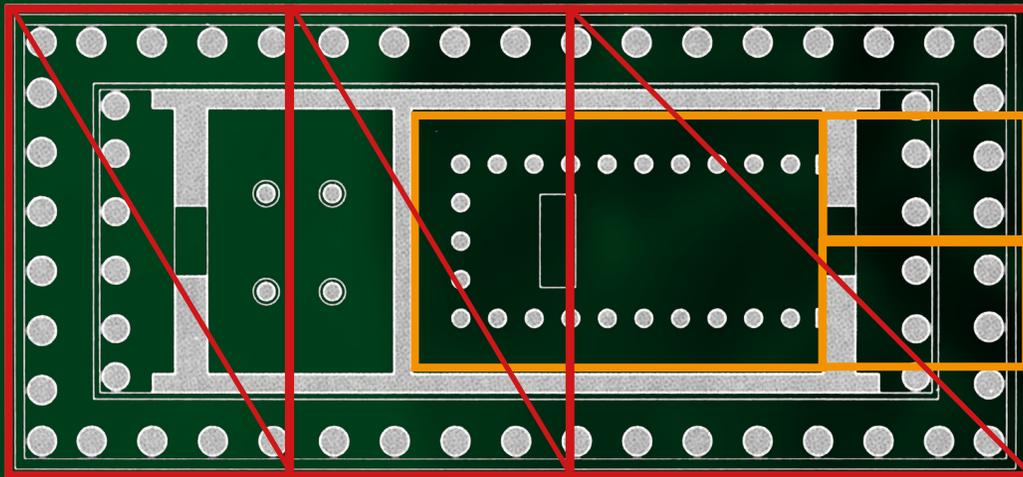
Considerando che l'altezza è di 146,804 m e il lato di 230,560 m e che l'**unità di misura utilizzata** è pari a 2,089 m (4 volte il **braccio egiziano** di 0,52/0,53 m) se ne deduce che il lato di base misurava **110 u** e l'altezza **70 u**. Se si considera metà della piramide i due cateti sono **70 u** e **55 u**: l'ipotenusa vale, allora, **89 u**.

Nella **serie di Fibonacci** i numeri **55 e 89** sono presenti e sono in rapporto aureo. Questo significa che, se non a livello teorico, gli egiziani conoscevano e utilizzavano le **proporzioni auree** in modo **empirico**.



Nel **Partenone** (447-432 a.C.) si realizza l'**ideale greco di misura equilibrata** e trova definitiva formulazione il rapporto tra le parti, caratteristico del periodo classico.

Il tempio è un **periptero ottastilo** in stile dorico con 8 colonne lungo i lati brevi e 17 lungo i lati lunghi, secondo il principio classico per il quale sul lato lungo il numero delle colonne laterali è il doppio più una di quelle del fronte. L'architetto **Ictino** ha applicato la sezione aurea nel **prospetto** e nella pianta, proporzionando di conseguenza tutte le sue parti.



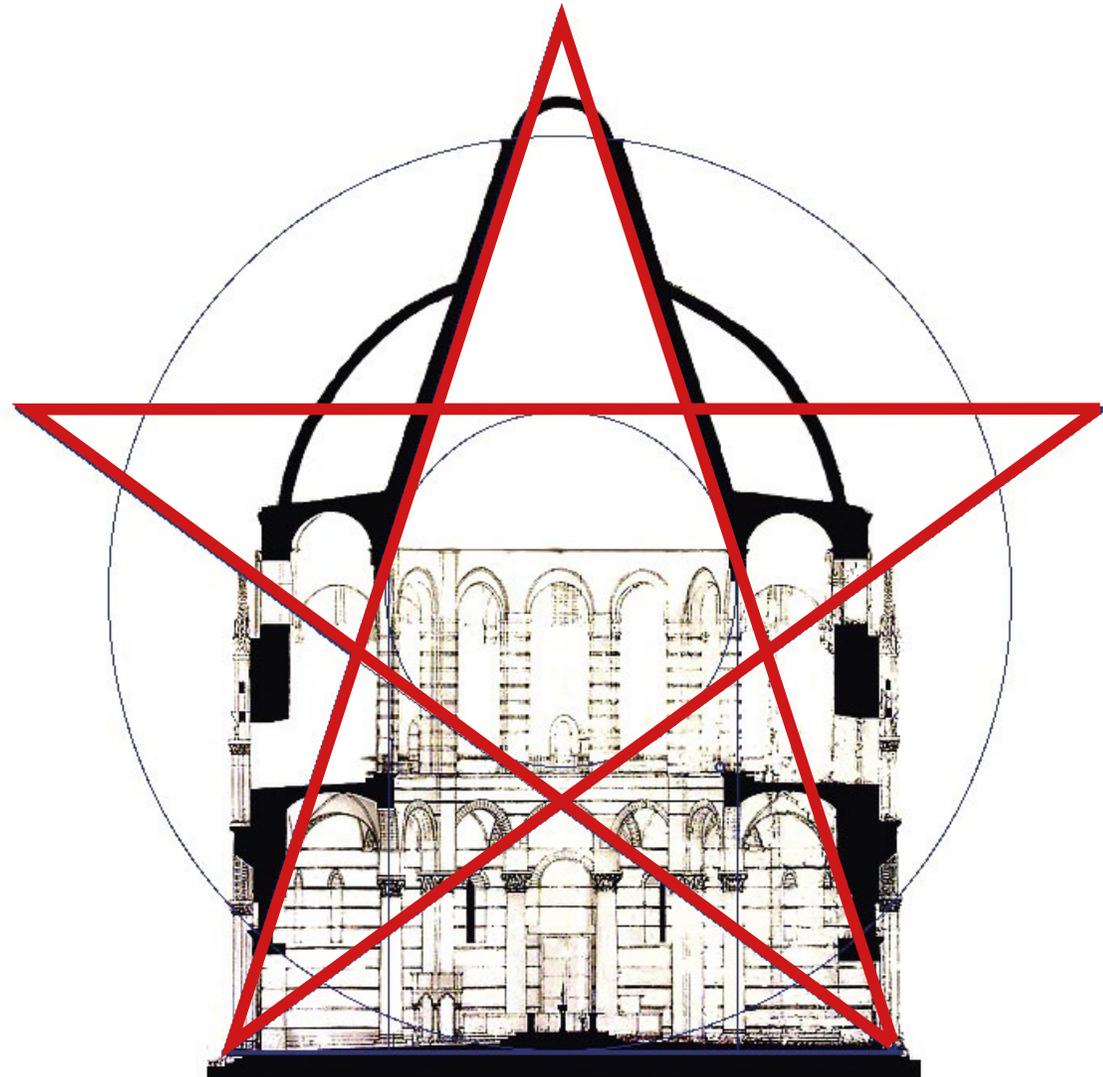


Nell'**Arco di Costantino**, il più importante degli archi trionfali romani, costruito nel **313 d.C.** per celebrare la vittoria dell'imperatore Costantino su Massenzio, **l'altezza dell'arco divide l'altezza totale secondo la sezione aurea**, mentre i due archi più piccoli giocano lo stesso ruolo nella distanza tra la base e il listello inferiore.



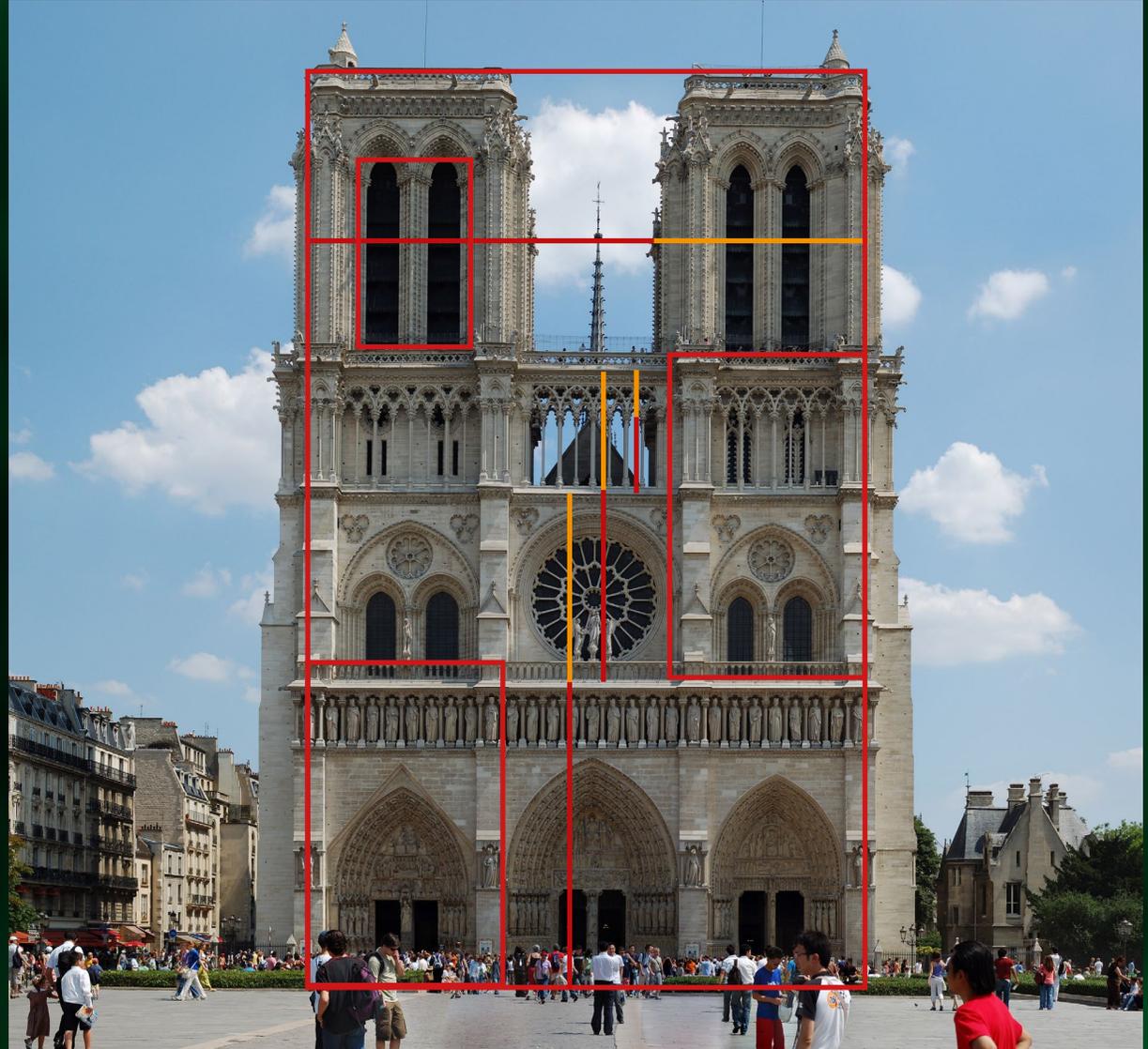
Nella progettazione del **Battistero romanico di Pisa** è stata utilizzata la **stella** ed il pentagono regolare che deriva dal rapporto aureo come griglia di riferimento.

Si riscontra, infatti, che l'angolo formato dalla cupola dodecagona interna è di **72°** e quello della punta in alto di **36°**.



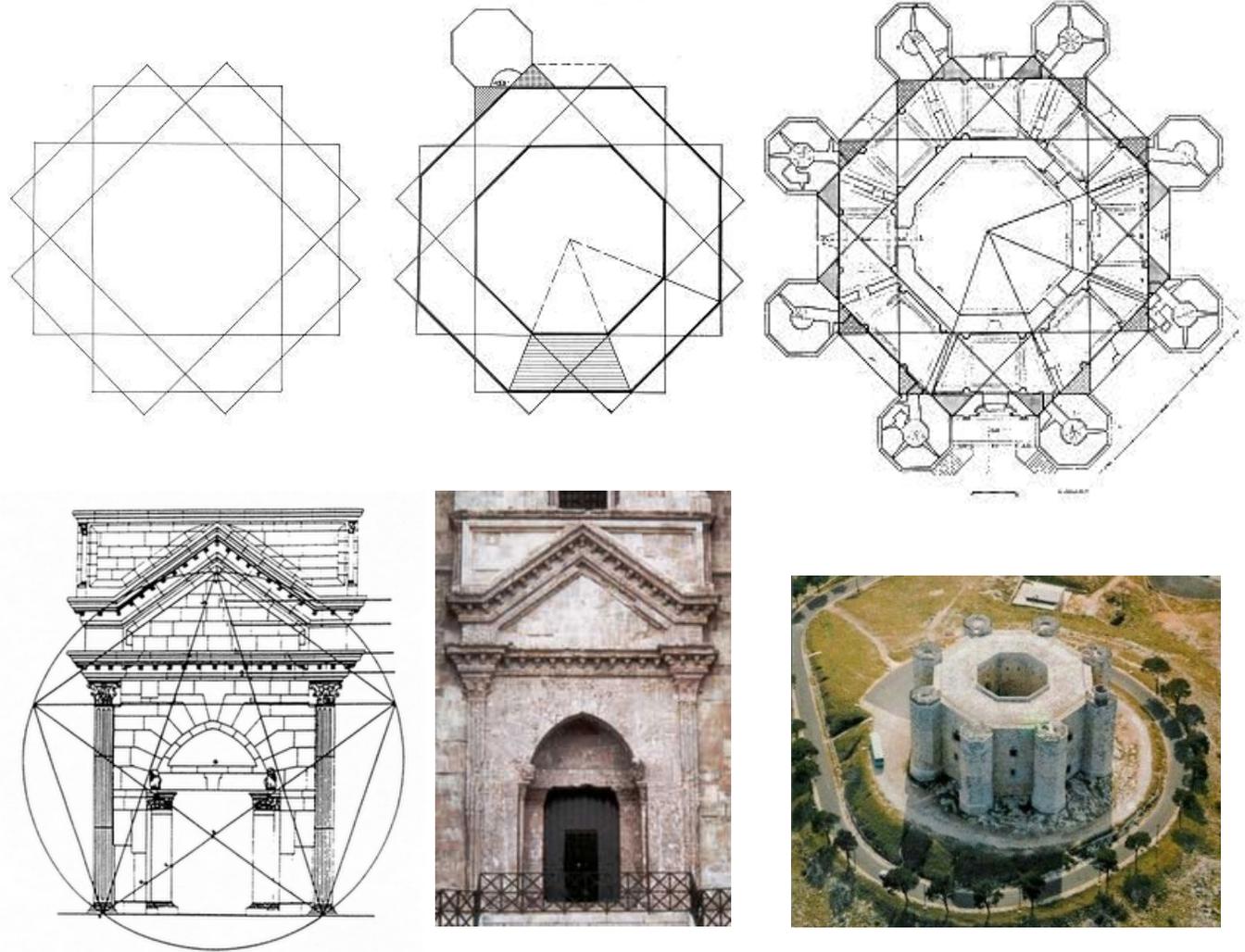
Tutte le **cattedrali gotiche** sono sempre basate sul quadrato, sul cerchio e sul pentagono, coniugando la simmetria razionale con quella irrazionale.

E' possibile dedurre che esiste una diretta connessione fra i sistemi greci e romani e quelli gotici; del resto, la presenza della **Sectio Aurea** ne è una indiscutibile prova. Nell'immagine sono evidenziati i segmenti aurei individuati sulla facciata di **Notre Dame**.



Castel del Monte ad Andria, esempio di architettura gotica in Puglia, fu costruito da Federico II di Svevia nel 1240.

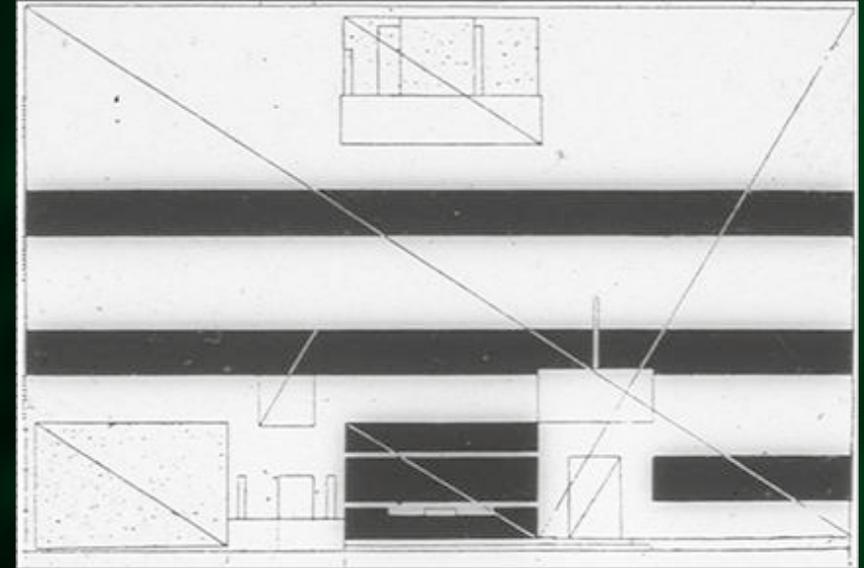
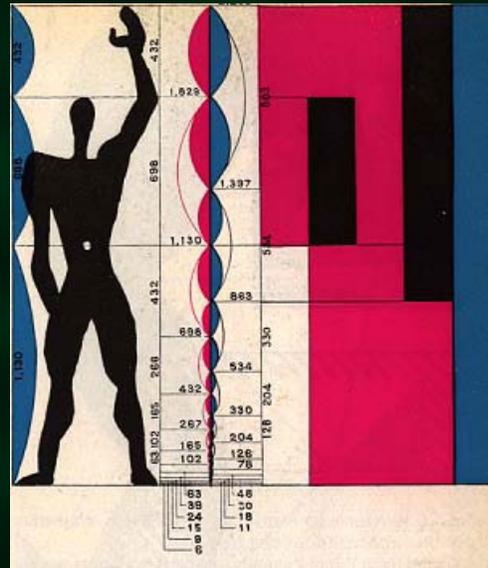
Il **portale** si basa sul pentagono stellato e sulla sua scomposizione secondo la sezione aurea, le sue potenze e le sue radici. La **pianta** è invece composta dall'intersezione di rettangoli aurei.



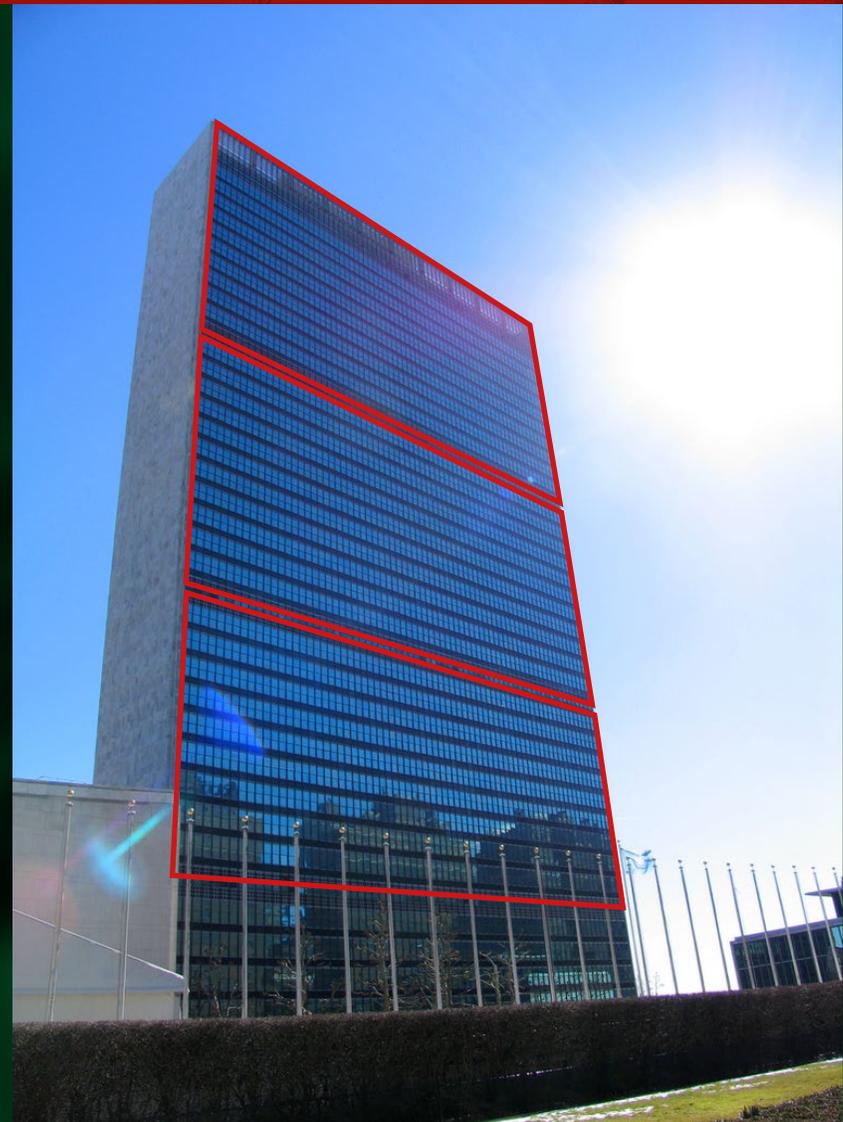
Nell'architettura del Rinascimento si preferirono griglie di moduli quadrati mentre nell'epoca barocca il tema era spesso il cerchio e l'ellissi.

Solo nel XX secolo viene recuperata la sezione aurea in architettura. Con il razionalismo **Le Corbusier** riprese questa proporzione per disegnare edifici e arredi.

Ridisegnò la sezione aurea applicata al corpo umano (detto **Modulor**) affinché questo diventasse l'unità di misura di tutto.



Intorno alla metà del XX secolo si ritrova la sezione aurea nel proporzionamento della facciata del **palazzo dell'ONU** a New York, mentre a Washington viene inaugurato il **Pentagono** sede del Dipartimento della Difesa.

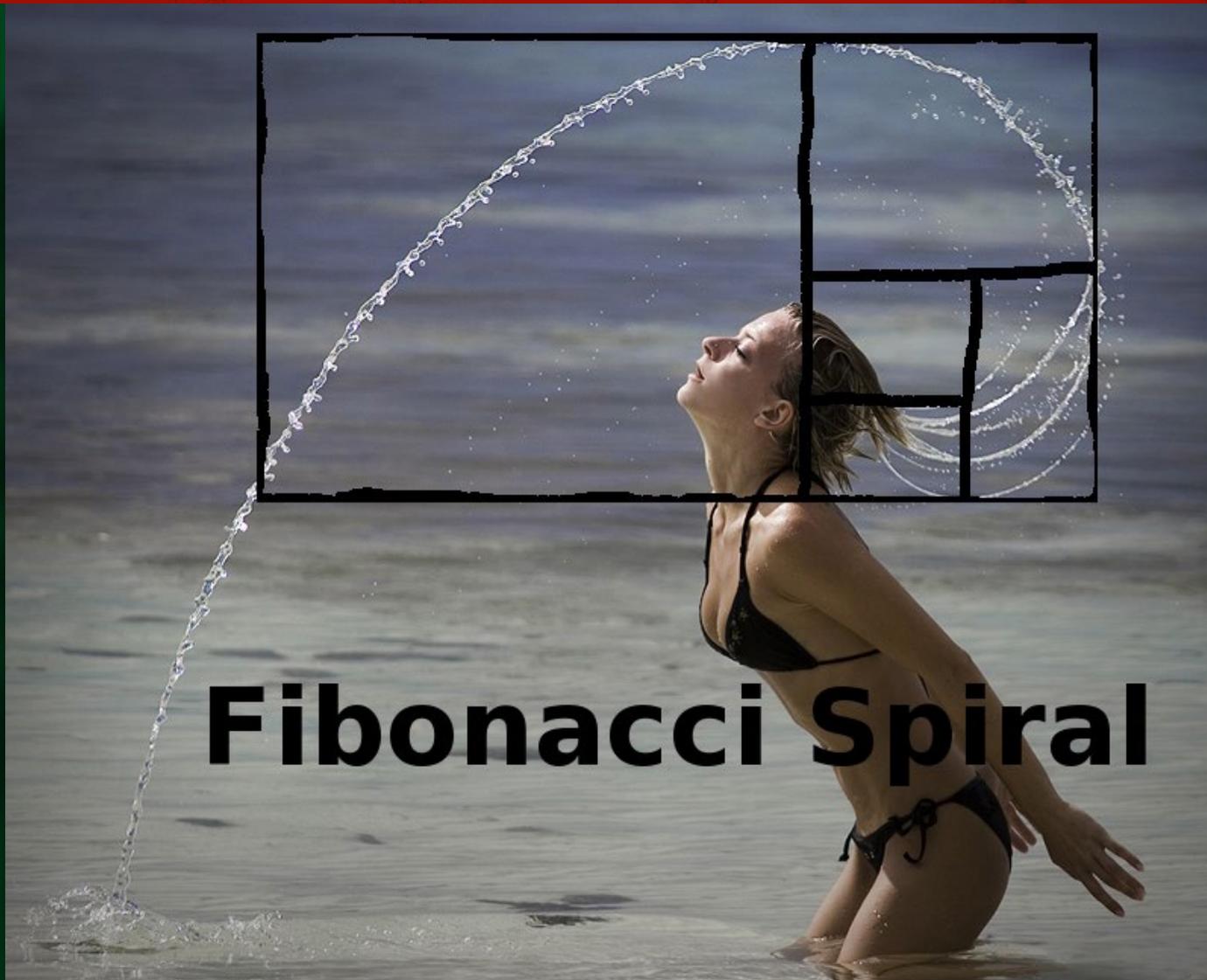
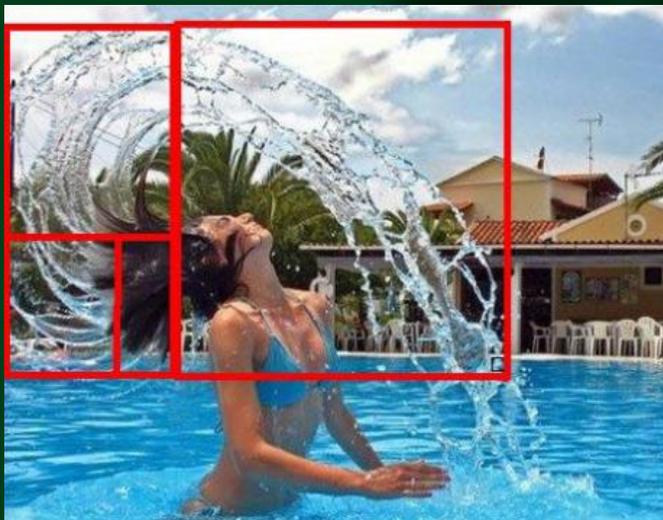




curiosità

CURIOSITÀ

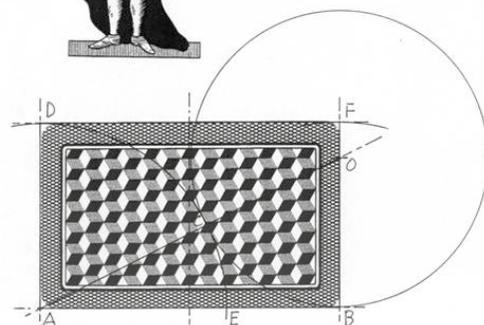
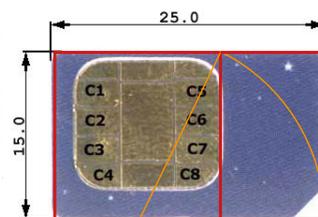
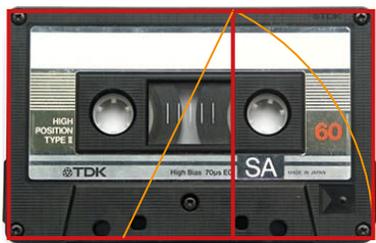
Tante sono le curiosità legate alla sezione aurea: la **curva d'acqua** creata dai capelli in movimento è una spirale aurea.



Fibonacci Spiral



Sono rettangoli aurei le **carte napoletane**, le **carte di credito**, le **SIM**, le **schede telefoniche**, le **musicassette** ed anche alcune **moto**... Anche l'**iPhone** mostra la sovrapposizione di due rettangoli aurei che formano il display.



La spirale aurea e la serie di Fibonacci si trovano nei posti più impensabili: dai **lavandini** ai **gelati**, dalle **magliette** ai **tatuaggi**!

